Zur Theorie

der

Linienflächen zweiter Ordnung.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen philosophischen Fakultät der Universität Rostock

vorgelegt von

Friedrich Brockmann

aus Rostock.

Rostock
Carl Hinstorffs Buchdruckerei
1904.

Referent: Herr Prof. Dr. Staude.

Gegenstand folgender Arbeit ist eine Übersicht über die verschiedenen Behandlungen der Aufgabe: Es sind drei lineare Komplexe gegeben, die Gleichung der Fläche zu finden, welche die den drei Komplexen gemeinsamen Geraden enthält.

Die grundlegenden Untersuchungen über die Erzeugenden der Linienflächen zweiter Ordnung stammen von Monge und Hachette und wurden 1795 und in den folgenden Jahren veröffentlicht. Auf diesen Untersuchungen beruht die Auflösung der Aufgabe: Es sind drei gerade Linien im Raume gegeben, die Fläche zu finden, welche durch eine an ihnen gleitende Gerade erzeugt wird. Diese Aufgabe ist ein spezieller Fall der obigen, da der spezielle lineare Komplex eine gerade Linie darstellt. Sie wurde zuerst 1827 gleichzeitig in verschiedener Form von Möbius und Steiner gelöst; später von Magnus, Salmon, Hesse.

Die Behandlung der Aufgabe in der zuerst aufgestellten Form wurde ermöglicht durch die Einführung der Linienkoordinaten durch Plücker. Dieser gab selbst in der 1868 veröffentlichten „Neuen Geometrie des Raumes“ die erste Lösung, der in den nächsten Jahren andere von Gordan, Cayley, Klein

folgten. Ausser der Darstellung dieser Untersuchungen ist in folgendem die Plücker sche Lösung in neuerer Bezeichnung gegeben und im letzten Teile mit Benutzung der Untersuchungen von Herrn Professor Staude[1] eine Anwendung der Aufgabe auf die Erzeugenden der Linienfläche zweiter Ordnung gemacht worden.

1) Archiv für Mathematik und Physik (3) Bd. 8.

§ 1.

Vorbereitende Sätze.

Monge und Hachette haben das Verdienst, die ersten genaueren Untersuchungen über die Erzeugenden der Linienflächen 2. Ordnung gemacht zu haben. Zwar hatte schon Wren[1] 1669 den Satz aufgestellt, dass das einschalige Rotationshyperboloid, von ihm Cylindroid genannt, durch Umdrehung einer Geraden um eine Axe erzeugt werden könne; dasselbe bewies 1698 Parent[2] auf synthetischem und analytischem Wege und nach ihm Sauveur.[3] Man beschäftigte sich jedoch nicht weiter mit dieser Frage, bis am Ende des 18. Jahrhunderts Monge und Hachette ihr näher traten, denen es auch gelang, die wichtigsten Eigenschaften der Erzeugenden auf dem einschaligen Hyperboloid und hyperbolischen Paraboloid festzustellen. Im Journal de l'école polytechnique von

---

1) Philosophical Transactions III. p. 961 u. f. 1669.

2) Essais et recherches de mathematiques et de physique, t. II. p. 645 und t. III. p. 470, 1698. Cantor, Geschichte der Mathematik. Bd. III. p. 401, 1898.

3) Essais et recherches d. m. e. d. ph. t. III. p. 526. Chasles, Geschichte der Geometrie, deutsche Ausgabe, p. 238. Anm. 58, 1839 (französische Ausgabe p. 242, 1837).

1795 berichtet Monge [4] über die ersten Untersuchungen folgendermassen:

„L'instituteur de stéréotomie, en parlant dans le cours préliminoire des surfaces engendrées par le mouvement d'une ligne droite, ..., avait considéré particulièrement celle qui est engendrée par une droite qui se meut sur trois autres, données d'une manière quelquonque. Les élèves chefs de brigade ont recherché les propriétés de cette surface et en ont découvert plusieurs très remarquables. Ils ont reconnu, 1.° qu'elle peut être engendrée par le mouvement de deux lignes droites différentes, en sorte qu'il n'ya aucun de ses points par lequel ne passent deux lignes droites qui se trouvent entièrement sur la surface; 2.° que cette surface est une des trois espèces dans lesquelles celles du second degré peuvent être divisées, de manière qu'elle a un centre et trois axes rectangulaires, par rapport auxquels elle est symétrique." [2]

In einer Abhandlung von Monge und Hachette [3] findet sich folgender Beweis für die Erzeugbarkeit des einschaligen Hyperboloids durch zwei Systeme von Geraden:

Alle Gleichungen der Oberflächen, die durch eine bewegliche Gerade erzeugt werden, sind enthalten in derjenigen, welche man durch Elimination von α aus folgenden beiden erhält:

---

1) Journal de l'école polytechnique, t. I. p. 5, 1795.

2) Dass überhaupt jede Linienfläche als durch die Bewegung einer Geraden längs dreier Kurven entstanden gedacht werden kann, bemerkt Hachette im Supplement zu Monges „Géométrie descriptive" § 1, 1. Nouvelle édition p. I. 1811.

3) Journal de l'école polytechnique, t. IV. p. 159, 1801.

$$(1) \qquad \begin{cases} y = \alpha x + \varphi(\alpha) \\ z = \psi(\alpha) \cdot x + \chi(\alpha), \end{cases}$$

wo φ, ψ, χ Funktionen sind, von deren Form das Bewegungsgesetz abhängt. Kombiniert man die erste Gleichung (1) mit der Hyperboloidgleichung

$$(2) \qquad b^2 c^2 x^2 + c^2 a^2 y^2 - a^2 b^2 z^2 = a^2 b^2 c^2$$

so wird diese:

$$(3) \quad (b^2 c^2 + c^2 a^2 \alpha^2) x^2 + 2 c^2 a^2 \alpha \varphi(\alpha) \cdot x + c^2 a^2 \varphi(a)^2 - a^2 b^2 c^2 - a^2 b^2 z^2 = 0$$

Dieser Ausdruck ist in zwei Faktoren zerlegbar, wenn er die Form hat:

$$(A x + B)^2 - a^2 b^2 z^2 = 0$$

oder: $$A^2 x^2 + 2 A B x + B^2 - a^2 b^2 z^2 = 0$$

Durch Vergleichung mit obiger Gleichung (3) ergibt sich:

$$A^2 = b^2 c^2 + c^2 a^2 \alpha^2; \; A B = c^2 a^2 \alpha \varphi(\alpha);$$
$$B^2 = c^2 a^2 \varphi(\alpha)^2 - a^2 b^2 c^2$$

Hieraus folgt:

$$\varphi(\alpha) = \sqrt{a^2 \alpha^2 + b^2}; \; A = c \sqrt{a^2 \alpha^2 + b^2}; \; B = a^2 c \alpha$$

Die Gleichung (3) zerfällt also in die beiden Faktoren:

$$(c \sqrt{a^2 \alpha^2 + b^2} \cdot x + a^2 c \alpha + a b z) \; (c \sqrt{a^2 \alpha^2 + b^2} \cdot x + a^2 c \alpha - a b z) = 0$$

Die zweite Gleisung (1) lässt sich durch jeden dieser beiden Faktoren ersetzen, also kann das einschalige Hyperboloid auf zwei Weisen durch eine Gerade erzeugt werden, und zwar sind die Gleichungen der beiden beweglichen Geraden:

$$(4)\quad \begin{cases} y = \alpha x + \sqrt{a^2\alpha^2 + b^2} \\ c\sqrt{a^2\alpha^2 + b^2}\,.\,x + a^2 c\alpha + a b z = o \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \alpha x + \sqrt{a^2\alpha^2 + b^2} \\ c\sqrt{a^2\alpha^2 + b^2}\,.\,x + a^2 c\alpha - a b z = o \end{cases}$$

Eliminiert man aus einem oder dem andern Gleichungssystem den Parameter α, so erhält man die Hyperboloidgleichung (2). Aus den Gleichungen (4) folgt, für $z = o$ bezw. $y = o$, dass einer und derselben Projektion der Erzeugenden auf die xy-Ebene zwei Projektionen auf die xz-Ebene entsprechen, und hieraus folgt noch:

1. Dass es auf der Oberfläche zwei Systeme von Geraden gibt.

2. Dass irgend eine Gerade des ersten Systems alle des zweiten schneidet.

3. Dass, wenn man irgend drei Gerade des einen Systems als Leitlinien für eine bewegliche betrachtet, diese das Hyperboloid erzeugt.

In derselben Abhandlung, p. 166, findet sich der dem angegebenen ganz analoge Beweis, dass das hyperbolische Paraboloid durch eine Gerade erzeugt werden kann, welche an drei festen, einer Ebene parallelen Geraden entlang gleitet. Hachette zeigt ferner, dass die Gleichung eines einschaligen Hyperboloids, welches auf drei, den drei Bahnlinien der erzeugenden Geraden parallele Axen bezogen ist, sich nicht ändert, wenn man an die Stelle der drei Bahnlinien drei andere setzt, von denen je eine mit einer der drei ersten parallel ist und zugleich die andern beiden schneidet. [1]

1) Hachette, Traité des surfaces du second degré. 1807. 4. p. 35.

Ausserdem wies er nach, dass das hyperbolische Paraboloid auch erzeugt wird durch eine Gerade, welche sich parallel mit einer festen Ebene bewegt und an zwei beliebige feste Gerade sich anlehnt; und dass, wenn man wiederum diese Gerade in drei Lagen festhält und als Bahnen für eine andere bewegliche gerade Linie betrachtet, diese immer einer zweiten Ebene parallel ist und dasselbe Paraboloid erzeugt, wie die erste.[1]

Einige Untersuchungen über das durch drei einem System angehörende Erzeugende bestimmte Parallelepiped und die sich hierauf beziehende Gleichungsform des Hyperboloids

$$\frac{yz}{bc}+\frac{zx}{ca}+\frac{xy}{ab}+\frac{1}{4}=0 \tag{5}$$

auf welche sich Steiner bei seiner Ableitung bezieht, finden sich in einer Abhandlung von Binet.[2]

Schliesslich seien noch die Untersuchungen Steiners[3] erwähnt, der die angegebenen Eigenschaften des einschaligen Hyperboloids aus seiner Erzeugung mittels zweier projektivischer Punktreihen oder Ebenenbüschel auf synthetischem Wege ableitet, wobei sich als besonderer Fall, wenn nämlich die gegebenen projektivischen Gebilde ähnlich sind oder spezielle Lage zu einander haben, dass hyperbolische Paraboloid ergibt.

---

1) Hachette, Traité de géométrie descriptive p. 71, 1822. vgl. Crelles Journal für Math. I. p. 339, 1826.

2) Binet, Journal de l'école polytechnique. cah. XVI. p. 319 u. f. 1813.

3) J. Steiner, Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten. Berlin 1832. Gesammelte Werke, Bd. I. p. 366–382, 1881.

§ 2.

Lösung mittels speziellen Koordinatensystems.

Obwohl Monge und Hachette alle Eigenschaften des einschaligen Hyperboloids und hyperbolischen Paraboloids, auf denen die Lösung unserer Aufgabe beruht, bereits gefunden hatten, so hat doch anscheinend [1] keiner von beiden sich die Aufgabe gestellt. Demnach sind als die ersten Lösungen wohl diejenigen von Möbius und Steiner, welche beide 1827 veröffentlicht wurden, zu betrachten. Wir stellen die Möbiussche voran, da sie mit den nachfolgenden in weniger engem Zusammenhange steht als die Steinersche; insbesondere auch wegen der Möbius eigentümlichen symbolischen Darstellungsweise durch „Ausdrücke" statt der Gleichungen.[2]

Es seien AB und CD zwei der gegebenen Geraden; die dritte habe den Ausdruck

(1) $$(a + a'y)\,A + (b + b'y)\,B + y\,C + D.$$

Eine AB und CD schneidende Gerade hat den Ausdruck [3]

(2) $$m\,x\,A + x\,B + n\,C + D,$$

wo m und n noch unbestimmte Grössen sind, die so bestimmt werden sollen, dass die Gerade (2) durch einen bestimmten Punkt P von (1) geht. Für diesen Punkt müssen (1) und (2) identisch sein; also

$$n = y;\ m\,x = a + a'y;\ x = b + b'y;\ m = \frac{a + a'y}{b + b'y}$$

---

1) Hachettes „Traité de Géom. descr." und „Traité des surfaces du second degré" standen mir nicht zur Verfügung.

2) Möbius, Barycentrischer Calcül §§ 111, 112. Gesammelte Werke p. 140 u. f.

3) B. C. § 56. G. W. p. 79.

Substituiert man diese Werte für m und n in (2) und nimmt der Einfachheit wegen statt x eine andere Veränderliche z, so dass

$$x = (b + b'y)\, z,$$

so erhält man den Ausdruck für die gesuchte Gerade, welche A B und C D schneidet und durch P geht:

$$(a + a'y)\, z\, A + (b + b'y)\, z\, B + y\, C + D.$$

Lässt man nun y nicht mehr einen bestimmten Wert haben, sondern veränderlich sein, so umfasst der gefundene Ausdruck alle durch A B, C D und (1) zugleich gehenden Graden, ist also der Ausdruck der Fläche, welche durch die Bewegung einer Geraden erzeugt wird, deren leitende Linien A B, C D und (1) sind. Dieser Ausdruck reduziert sich, wenn man D, C, $aA + bB$ und $a'A + b'B$ zu Fundamentalpunkten nimmt, auf die Form

$$A + x\, B + y\, C + \delta\, x\, y\, D$$

stellt also ein einschaliges Hyperboloid dar. [1]

Die Ableitung des hyperbolischen Paraboloids gibt Möbius nicht ausdrücklich an. Sie ergibt sich leicht, wenn man das Fundamentaltetraeder A B C D so wählt, dass die beiden gegebenen Graden, an welchen die bewegliche gleitet, A C und B D sind, und dass die gegebene Ebene, welcher die bewegliche Gerade parallel sein soll, den Kanten A B und C D parallel ist. Denn der Ausdruck einer Geraden, welche in einer mit A B und C D parallelen Ebene liegt und zugleich A C und B D schneidet, ist: [2]

$$a\, x\, A + a\, B + x\, C + D.$$

1) B. C. § 111. G. W. p. 138 und 139.
2) B. C. § 56. G. W. p. 80.

Dieser Ausdruck ist bei veränderlichem a von der Form des Ausdrucks für das hyperbolische Paraboloid:[1]

$$A + xB + yC + xyD.$$

Steiner[2] bedient sich bei seiner Ableitung des Hyperboloids schiefwinkliger Koordinaten und nimmt folgendes Koordinatensystem: man lege durch jede der drei gegebenen, windschiefen Geraden 1, 2, 3 eine Ebene, welche bezw. 3, 1, 2 parallel ist; der Schnittpunkt der drei Ebenen sei Kordinatenanfangspunkt und die von 1, 2, 3 auf den Axen abgeschnittenen Stücke seien a, b, c. Dann sind die Gleichungen von 1, 2, 3:

$$(3) \qquad \begin{cases} y = o \\ z = c \end{cases} \quad \begin{cases} z = o \\ x = o \end{cases} \quad \begin{cases} x = o \\ z = b \end{cases}$$

Die Gleichung der beweglichen Geraden sei

$$(4) \qquad (x - x_0) : (y - y_0) : (z - z_0) = \alpha ; \beta : \gamma.$$

Die Bedingungen, dass (4) die drei gegebenen Geraden schneide, sind:

$$y : (z - c) = \beta : \gamma ; \quad z : (x - a) = \gamma : \alpha ; \quad x : (y - b) = \alpha : \beta.$$

Durch Multiplikation dieser drei Gleichungen werden α, β, γ eliminiert, und die Gleichung des Hyperboloids ist:

$$(5) \qquad (x - a)(y - b)(z - c) = xyz.$$

Diese Gleichung geht durch die Koordinatentransformation

$$\xi = x - \frac{a}{2} ; \quad \eta = y - \frac{b}{2} ; \quad \zeta = z - \frac{c}{2}$$

über in die Mittelpunktsgleichung

1) B. C. § 112. G. W. p. 141.
2) Crelles Journal für Mathematik II p. 272, 1827.

(6)
$$\left(\xi+\frac{a}{2}\right)\left(\eta+\frac{b}{2}\right)\left(\zeta+\frac{c}{2}\right)=$$
$$\left(\xi-\frac{a}{2}\right)\left(\eta-\frac{b}{2}\right)\left(\zeta-\frac{c}{2}\right)$$

welche, wie man leicht sieht, mit der in § 1 (5) angegebenen Form identisch ist.

Steiner hat zwar dies Verfahren nicht vollständig ausgeführt, sondern nur die Gleichungen der drei Geraden und die beiden Flächengleichungen (5) und (6) angegeben; doch hat er sich offenbar desselben bedient, da die Gleichungen in dieser Form so am einfachsten erhalten werden.[1]

Ein ähnliches Koordinatensystem wie Steiner wählt Magnus bei seiner Ableitung des Hyperboloids.[2] Legen wir nämlich durch jede der drei gegebenen Geraden eine zu den beiden andern parallele Ebene, so erhalten wir ein Parallelepiped, dessen Mittelpunkt Koordinatenanfangspunkt sei, während die Axen den gegebenen Geraden parallel sind. Die Gleichungen derselben sind dann, wenn 2a, 2b, 2c die Kanten des Parallelepipeds sind:

(7)
$$\begin{cases} y=-b \\ z=c \end{cases} \quad \begin{cases} z=-c \\ x=a \end{cases} \quad \begin{cases} x=-a \\ y=b \end{cases}$$

Die Gleichung der beweglichen Geraden sei:

(8)
$$\begin{cases} y=b'x+b'' \\ z=c'x+c'' \end{cases}$$

---

1) Vgl. Salmon-Fiedler, Geometrie des Raumes, 2. Aufl. I. p. 123, 1874.

2) L. J. Magnus, Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen. p. 277, 1837.

Die Bedingungen des Schneidens sind:

$$(9)\qquad \begin{cases} b'(c''-c)-c'(b''+b)=0 \\ c+c'a+c''=0 \\ b+b'a-b''=0 \end{cases}$$

Aus (8) und (9) sind b', b'', c', c'' zu eliminieren. Aus der zweiten und dritten Gleichung (9) setzen wir

$$c''=-c-c'a$$
$$b''=b+b'a$$

in die drei Gleichungen ein:

$$-b'(2c+c'a)-c'(2b+b'a)=0$$
$$y=b'x+b+b'a$$
$$z=c'x-c-c'a$$

und hieraus ergibt sich durch Elimination von b' und c' als Gleichung des Hyperboloids:

$$\frac{y-b}{x+a}\left(2c+\frac{z+c}{x-a}a\right)+\frac{z+c}{x-a}\left(2b+\frac{y-b}{x+a}a\right)=0$$

woraus man nach einigen Umformungen die Mittelpunktsgleichung

$$(10)\qquad \frac{yz}{bc}+\frac{zx}{ca}+\frac{xy}{ab}+1=0$$

erhält, so dass der Mittelpunkt des Parallelepipeds auch Mittelpunkt des Hyperboloids ist. Aus der Form der Gleichung (10) geht hervor, dass drei windschiefe Kanten eines Parallelepipeds dasselbe Hyperboloid bestimmen wie die ihnen gegenüberliegenden Kanten; denn (10) bleibt ungeändert, wenn ich statt der Gleichungen (7) die folgenden nehme:

$$\begin{cases} y=b \\ z=-c \end{cases}\quad\begin{cases} z=c \\ x=-a \end{cases}\quad\begin{cases} x=a \\ z=-b \end{cases}$$

Magnus gibt auch eine Ableitung des hyperbolischen Paraboloids,[1] indem er von den beiden Erzeugungsarten, die schon Hachette bemerkte (vgl. § 1), nur die eine benutzte, bei welcher die gegebenen Elemente zwei Gerade und eine Ebene sind.

Das Koordinatensystem ist folgendes: zur x-Axe nehmen wir die Verbindungslinie der Schnittpunkte der beiden gegebenen Geraden mit der gegebenen Ebene. Der Halbierungspunkt derselben sei O. Durch O ziehen wir zu den gegebenen Geraden zwei Parallelen g und g', die eine Ebene E bestimmen, deren Schnittgerade mit der gegebenen Ebene die z-Axe sei. Ihr parallel ziehen wir in E irgend eine Gerade, welche g und g' in den Punkten Q und R schneiden möge. Wir halbieren QR in P und nehmen OP als z-Axe. Dann sind die Gleichungen der gegebenen Geraden von der Form:

$$(11) \qquad \begin{cases} x = a \\ y = b\,z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -a \\ y = -b\,z \end{cases}$$

die der beweglichen:

$$(12) \qquad \begin{cases} x = a'\,z + a'' \\ y = \qquad b'' \end{cases}$$

Die Bedingungen, dass diese jene beiden schneide, sind:

$$(13) \qquad \begin{cases} a'\,b'' + b\,a'' - a\,b = 0 \\ a'\,b'' - b\,a'' - a\,b = 0 \end{cases}$$

Aus (12) und (13) sind a', a'', b'' zu eliminieren. Durch Addition der beiden Gleichungen (13) erhält man

---

1) Magnus, Aufg. und Lehrs. p. 278.

$$b'' = \frac{a\,b}{a'}$$

durch Subtraktion:

$$a'' = o$$

so dass man hat:

$$x = a'\,z \;;\; y = \frac{a\,b}{a'}$$

woraus durch Elimination von a' die Gleichung des gesuchten Paraboloids hervorgeht:

$$x\,y - a\,b\,z = o$$

Einige von den bisher angegebenen Methoden etwas abweichende Lösungen, sowohl für Hyperboloid, wie für das Paraboloid finden sich bei Salmon.[1]

Zur Ableitung des Hyperboloids werden die Geraden in derselben Form wie bei Magnus gegeben. Die Gleichungen sind also wieder:

$$(7) \qquad \begin{cases} y = -b \\ z = c \end{cases} \quad \begin{cases} z = -c \\ x = a \end{cases} \quad \begin{cases} x = -a \\ y = b \end{cases}$$

Die Gleichung einer die beiden ersten von ihnen schneidenden Geraden ist

$$(14) \qquad \begin{cases} z + c = \lambda\,(y - b) \\ z - c = \mu\,(x + a) \end{cases}$$

mit unbestimmtem λ und μ, indem sie als Schnitt zweier Ebenen aus den durch die beiden gegebenen Geraden repräsentierten Ebenenbüscheln aufgefasst wird. Die Gerade (8) schneidet auch die dritte gegebene, wenn

$$(15) \qquad c + \mu\,a + \lambda b = o$$

---

1) Salmon - Fiedler, Geometrie des Raumes, 2. Aufl. I p. 122 u. f. 1874.

Führt man in die Bedingung (15) λ und μ aus (14) ein, so folgt

$$c + \frac{z-c}{x+a}a + \frac{z+c}{y-b}b = 0$$

als Gleichung des Hyperboloids, woraus wieder die Form (10) hervorgeht.

Salmon gibt auch eine Lösung in Tetraederkoordinaten, welche derjenigen von Möbius ganz analog ist.

Die beiden ersten Geraden können als gegenüberliegende Kanten des Koordinatentetraeders gedacht werden, und haben also die Gleichungen:

(16) $$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

dann kann die Gleichung der dritten ohne Beschränkung in der Form

(17) $$\begin{cases} x_1 = a_3 x_3 + a_4 x_4 \\ x_2 = b_3 x_3 + b_4 x_4 \end{cases}$$

angenommen werden. Die bewegliche Gerade hat als gemeinsame Transversale der beiden ersten die Form

(18) $$\begin{cases} x_1 - \lambda x_2 = 0 \\ x_3 - \mu x_4 = 0 \end{cases}$$

Eliminieren wir aus (17) und (18) x_1, x_2, x_3, x_4, so erhalten wir die Bedingung, dass die bewegliche Gerade auch die dritte schneidet:

(19) $$a_3 \mu + a_4 = \lambda (b_3 \mu + b_4).$$

Eliminieren wir schliesslich noch λ und μ aus (18) und (19), so wird die Gleichung des Hyperboloids:

$$a_3 \frac{x_3}{x_4} + a_4 = \frac{x_1}{x_2}\left(b_3 \frac{x_3}{x_4} + b_4\right)$$

oder:

$$a_3 x_2 x_3 + a_4 x_2 x_4 - b_3 x_3 x_1 - b_4 x_1 x_4 = 0$$

Das hyperbolische Paraboloid leitet Salmon durch die beiden von Hachette angegebenen Erzeugungsarten ab, zunächst als die Fläche, welche durch eine längs dreier fester, derselben Ebene paralleler Geraden fortbewegte gerade Linie erzeugt wird, und sodann als die Fläche, welche durch eine gerade Linie erzeugt wird, die bei ihrer Bewegung längs zweier fester Geraden einer festen Ebene stets parallel bleibt. Beide Arten der Erzeugung sind ja im Grunde dieselben, erfordern aber infolge der verschiedenen gegebenen Elemente doch verschiedene Methoden der Lösung.

Bei der ersten Ableitung nehmen wir die x y-Ebene den drei Geraden parallel an, die x- und y-Axen parallel den beiden ersten und die z-Axe als Schnittgerade der drei gegebenen, so dass die Gleichungen derselben sind:

(20)
$$\begin{cases} x = 0 \\ z = c_1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = c_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = b\,y \\ z = c_3 \end{cases}$$

Die Gleichung einer die beiden ersten schneidenden Geraden ist:

(21)
$$\begin{cases} x = \lambda\,(z - c_1) \\ y = \mu\,(z - c_2) \end{cases}$$

Sie schneidet auch die dritte, wenn:

(21)
$$\lambda\,(c_3 - c_1) = b\,\mu\,(c_3 - c_2)$$

Eliminieren wir aus (21) und (22) λ und μ, so wird die Gleichung des gesuchten Paraboloids:

$$\frac{x}{z - c_1}\,(c_3 - c_1) = b\,\frac{y}{z - c_2}\,(c_3 - c_2)$$

umgeformt:

$$(c_3 - c_1)\,x\,(z - c_2) = b\,(c_3 - c_2)\,y\,(z - c_1).$$

Bei der zweiten Lösung werden die beiden gegebenen Geraden parallel der y- und x-Axe und die z-Axe in der Entfernung c, bezw. — c vom Koordinatenanfang schneidend angenommen, so dass ihre Gleichungen sind:

(22) $$\begin{cases} x = 0 \\ z = c \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = -c \end{cases}$$

Die feste Ebene sei in der Normalform gegeben:

(23) $$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = -0$$

Die Gleichung einer gemeinsamen Transversale der beiden Geraden (22) ist:

(24) $$x = \lambda (z - c)$$
$$y = \mu (z + c)$$

Die Bedingung, dass diese der Ebene (23) parallel sei, lautet:

(25) $$\lambda \cos \alpha + \mu \cos \beta + \cos \gamma = 0$$

Eliminieren wir λ und μ aus (24) und (25), so erhalten wir als Gleichung des gesuchten Paraboloids:

$$\frac{x}{z - c} \cos \alpha + \frac{y}{z + c} \cos \beta + \cos \gamma = 0$$

oder:

$$\cos \alpha \,.\, x (z + c) + \cos \beta \,.\, y (z - c) + \cos \gamma (z^2 - c^2) = 0.$$

Die in diesem Paragraphen zusammengefassten Ableitungen haben das gemeinsame, dass in ihnen, um die Lösung der Aufgabe zu erleichtern, spezielle Koordinatensysteme eingeführt werden. Hierdurch wird allerdings das Verfahren recht einfach und übersichtlich; andererseits aber tritt der Nachteil ein, dass die allgemeine Aufgabe spezialisiert werden muss, indem über die Lage der gegebenen Geraden bestimmte Voraus-

setzungen gemacht werden müssen. Es treten infolgedessen, abgesehen von der Möglichkeit, dass die Geraden sich teilweise schneiden, die drei Fälle auf, dass die drei windschiefen Geraden

1. alle endlich und nicht einer festen Ebene parallel,
2. einer festen Ebene parallel,
3. dass eine unendlich fern (ersetzt durch die zugehörige Ebene), und die beiden andern beliebig sind;

und es ergibt sich für 1. das einschalige Hyperboloid, für 2. und 3. das hyperbolische Paraboloid.

§ 3.

Lösung in allgemeiner Form.

Eine Lösung, bei welcher kein spezielles Koordinatensystem benutzt wird, hat H e s s e gegeben.[1] Die Aufgabe lautet bei H e s s e:

Drei gerade Linien L_1, L_2, L_3 sind im Raume gegeben, eine vierte gerade Linie L gleitet an ihnen hin, indem sie jede der gegebenen geraden Linien schneidet; es soll erstens die Relation gefunden werden zwischen den Kosinus der Neigungswinkel, welche die gleitende gerade Linie L mit den Koordinatenaxen bildet und zweitens der geometrische Ort dieser geraden Linie.

Die Gleichungen der drei festen Geraden werden unter Annahme eines rechtwinkligen Koordinatensystems in Parameterdarstellung gegeben:

$$(1)\quad \begin{cases} x = x_1^0 + \alpha_1 s_1 \\ y = y_1^0 + \beta_1 s_1 \\ z = z_1^0 + \gamma_1 s_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = x_2^0 + \alpha_2 s_2 \\ y = y_2^0 + \beta_2 s_2 \\ z = z_2^0 + \gamma_2 s_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = x_3^0 + \alpha_3 s_3 \\ y = y_3^0 + \beta_3 s_3 \\ z = z_3^0 + \gamma_3 s_3 \end{cases}$$

1) O. Hesse, Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, 3 Aufl. p. 113 u. f. 1868.

Nennen wir nun die Schnittpunkte der beweglichen Geraden mit den drei gegebenen P_1, P_2, P_3; ihre Koordinaten bezw. x_1', y_1', z_1'; x_2', y_2', z_2'; x_3', y_3', z_3'; den laufenden Punkt der beweglichen Geraden P und PP_1, PP_2, PP_3 bezw. r_1, r_2, r_3, so lässt sich die Gleichung der gleitenden Geraden in drei Formen geben:

$$(2)\quad \begin{cases} x = x_1' + \alpha r_1 \\ y = y_1' + \beta r_1 \\ z = z_1' + \gamma r_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = x_2' + \alpha r_2 \\ y = y_2' + \beta r_2 \\ z = z_2' + \gamma r_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = x_3' + \alpha r_3 \\ y = y_3' + \beta r_3 \\ z = z_3' + \gamma r_3 \end{cases}$$

Da die Koordinaten der Punkte P_1, P_2, P_3 den Gleichungen (1) genügen müssen, ergeben sich die Beziehungen:

$$(3)\quad \begin{aligned} x &= x_1^0 + \alpha_1 s_1 + \alpha r_1 & x &= x_2^0 + \alpha_2 s_2 + \alpha r_2 \\ y &= y_1^0 + \beta_1 s_1 + \beta r_1 & y &= y_2^0 + \beta_2 s_2 + \beta r_2 \\ z &= z_1^0 + \gamma_1 s_1 + \gamma r_1 & z &= z_2^0 + \gamma_2 s_2 + \gamma r_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= x_3^0 + \alpha_3 s_3 + \alpha r_3 \\ y &= y_3^0 + \beta_3 s_3 + \beta r_3 \\ z &= z_3^0 + \gamma_3 s_3 + \gamma r_3 \end{aligned}$$

Wir haben so 9 Gleichungen mit den 12 Variabeln x, y, z; s_1, s_2, s_3; r_1, r_2, r_3; α, β, γ, von denen 9 zu eliminieren sind. Wir können durch Division je dreier Gleichungen mit r_1, r_2, r_3 dieselben linear und homogen in

$\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \frac{1}{r_3}$; $\frac{s_1}{r_1}, \frac{s_2}{r_2}, \frac{s_3}{r_3}$; α, β, γ machen und die Eliminationsgleichung aufstellen; die Determinante 9. Grades ist aber zu unübersichtlich, und es sollen deshalb aus (3) noch erst x, y, z eliminiert werden, welche für die Lösung des ersten Teils der Aufgabe nicht erforderlich sind. Es ergeben sich die sechs Gleichungen:

$$x_2^0 - x_1^0 + \alpha_2 s_2 - \alpha_1 s_1 + (r_2 - r_1)\alpha = 0$$
$$x_3^0 - x_1^0 + \alpha_3 s_3 - \alpha_1 s_1 + (r_3 - r_1)\alpha = 0$$
$$y_2^0 - y_1^0 + \beta_2 s_2 - \beta_1 s_1 + (r_2 - r_1)\beta = 0$$
$$y_3^0 - y_1^0 + \beta_3 s_3 - \beta_1 s_1 + (r_3 - r_1)\beta = 0$$
$$z_2^0 - z_1^0 + \gamma_2 s_2 - \gamma_1 s_1 + (r_2 - r_1)\gamma = 0$$
$$z_3^0 - z_1^0 + \gamma_3 s_3 - \gamma_1 s_1 + (r_3 - r_1)\gamma = 0$$

Multiplizieren wir sämtliche sechs Gleichungen mit einem Faktor λ und eliminieren die in den Gleichungen linear und homogen vorkommenden sechs Unbekannten λ, $-\lambda s_1$, λs_2, λs_3, $\lambda(r_2 - r_1)$, $\lambda(r_3 - r_1)$, so erhalten wir als Resultat der Elimination die gesuchte Bedingungsgleichung zwischen den Kosinus α, β, γ in der Form:

(4)
$$\begin{vmatrix} x_2^0 - x_1^0 & \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & \alpha & 0 \\ y_2^0 - y_1^0 & \beta_1 & \beta_2 & 0 & \beta & 0 \\ z_2^0 - z_1^0 & \gamma_1 & \gamma_2 & 0 & \gamma & 0 \\ x_3^0 - x_1^0 & \alpha_1 & 0 & \alpha_3 & 0 & \alpha \\ y_3^0 - y_1^0 & \beta_1 & 0 & \beta_3 & 0 & \beta \\ z_3^0 - z_1^0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_3 & 0 & \gamma \end{vmatrix} = 0$$

Aus dieser Gleichung geht die Gleichung der gesuchten Oberfläche hervor, wenn man für α, β, γ in der letzten und vorletzten Kolonne ihre Werte aus dem letzten, bezw. vorletzten System der Gleichungen (3) setzt. Dann erhält man mit Anwendung bekannter Determinantensätze als Gleichung der gesuchten Fläche:

(5)
$$\begin{vmatrix} x_2^0 - x_1^0 & \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & x - x_2^0 & 0 \\ y_2^0 - y_1^0 & \beta_1 & \beta_2 & 0 & y - y_2^0 & 0 \\ z_2^0 - z_1^0 & \gamma_1 & \gamma_2 & 0 & z - z_2^0 & 0 \\ x_3^0 - x_1^0 & \alpha_1 & 0 & \alpha_3 & 0 & x - x_3^0 \\ y_3^0 - y_1^0 & \beta_1 & 0 & \beta_3 & 0 & y - y_3^0 \\ z_3^0 - z_1^0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_3 & 0 & z - z_3^0 \end{vmatrix} = 0$$

Die Gleichung lässt sich jedoch noch etwas übersichtlicher darstellen. Wir schreiben die drei ersten Gleichungen in der Form:

$$\frac{x - x_1^0 - \alpha_1 s_1}{r_1} - \frac{x - x_2^0}{r_2} + \alpha_2 \frac{s_2}{r_2} = 0$$

$$\frac{y - y_1^0 - \beta_1 s_1}{r_1} - \frac{y - y_2^0}{r^2} + \beta_2 \frac{s_2}{r_2} = 0$$

$$\frac{z - z_1^0 - \gamma_1 s_1}{r_1} - \frac{z - z_2^0}{r_2} + \gamma_2 \frac{s_2}{r_2} = 0$$

Diese Gleichungen sind linear und hanogen in $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \frac{s_2}{r_2}$; die Determinante muss verschwinden.

$$\begin{vmatrix} x - x_1^0 - \alpha_1 s_1 & x - x_2^0 & \alpha_2 \\ y - y_1^0 - \beta_1 s_1 & y - y_2^0 & \beta_2 \\ z - z_1^0 - \gamma_1 s_1 & z - z_2^0 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

anders geschrieben:

$$(6) \quad \begin{vmatrix} x - x_1^0 & x - x_2^0 & \alpha_2 \\ y - y_1^0 & y - y_2^0 & \beta_2 \\ z - z_1^0 & z - z_2^0 & \gamma_2 \end{vmatrix} - s_1 \begin{vmatrix} \alpha_1 & x - x_2^0 & \alpha_2 \\ \beta_1 & y - y_2^0 & \beta_2 \\ \gamma_1 & z - z_2^0 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

Durch analoge Behandlung der drei letzten Gleichungen (4) ergibt sich:

$$(7) \quad \begin{vmatrix} x - x_1^0 & x - x_3^0 & \alpha_3 \\ y - y_1^0 & y - y_3^0 & \beta_3 \\ z - z_1^0 & z - z_3^0 & \gamma_3 \end{vmatrix} - s_1 \begin{vmatrix} \alpha_1 & x - x_3^0 & \alpha_3 \\ \beta_1 & y - y_3^0 & \beta_3 \\ \gamma_1 & z - z_3^0 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0$$

Eliminieren wir aus (6) und (7) noch s_1 und formen die Determinanten etwas um, so erhalten wir als zweite Gleichungsform der gesuchten Fläche:

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} x-x_2^0 & x_1^0-x_2^0 & \alpha_2 \\ y-y_2^0 & y_1^0-y_2^0 & \beta_2 \\ z-z_2^0 & z_1^0-z_2^0 & \gamma_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x-x_3^0 & \alpha_3 & \alpha_1 \\ y-y_3^0 & \beta_3 & \beta_1 \\ z-z_3^0 & \gamma_3 & \gamma_1 \end{vmatrix}$$
$$- \begin{vmatrix} x-x_3^0 & x_1^0-x_3^0 & \alpha_3 \\ y-y_3^0 & y_1^0-y_3^0 & \beta_3 \\ z-z_3^0 & z_1^0-z_3^0 & \gamma_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x-x_2^0 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ y-y_2^0 & \beta_2 & \beta_1 \\ z-z_2^0 & \gamma_2 & \gamma_1 \end{vmatrix} = 0$$

Hesses Ableitung ist zwar nicht so kurz und durchsichtig, wie die Lösungen des vorigen Paragraphen, hat aber vor diesen den Vorzug grösserer Allgemeinheit, da das Koordinatensystem beliebig gewählt werden kann. Mit Ausnahme des Unendlichfernen ist also hier jede beliebige Lage der gegebenen Graden gestattet; es wird daher eine besondere Ableitung des hyperbolischen Paraboloids unnötig, und auch die zerfallenden Linienflächen 2. Ordnung sind nicht ausgeschlossen. Bei der algebraischen Darstellung ist die Anwendung der Determinanten hervorzuheben, wodurch das Eliminationsverfahren ausserordentlich erleichtert wird. Allerdings bleibt durch Auszeichnung der einen Geraden die Symmetrie nicht ganz erhalten. — Die Gleichung (8) folgt übrigens leichter aus (5), wenn die Determinante (5) als Produkt der Unterdeterminanten dritten Grades aus den drei ersten und den drei letzten Zeilen dargestellt wird.

Bevor wir zur Darstellung der Methoden, die sich aus der Einführung der Linienkoordinaten durch Plücker ergeben, übergehen, sollen im folgenden Paragraphen die nötigen Definitionen und Sätze in der später gebrauchten Bezeichnung angegeben werden.

§ 4.

Bezeichnung der Liniengebilde und Aufzählung der nötigen Definitionen und Sätze.

Die gerade Linie im Raume kann einerseits aufgefasst werden als die Verbindung zweier Punkte, andererseits als Schnitt zweier Ebenen. Ihre Koordinaten werden dieser dualen Betrachtungsweise gemäss als Strahlen- bezw. Achsenkoordinaten bezeichnet, und man versteht unter ihnen die Ausdrücke:

Strahlenkoordinaten.	Achsenkoordinaten.
(1) $\left\{\begin{array}{l} \varrho\, p_1 = \varrho\, p_{23} = x_2 y_3 - y_2 x_3 \\ \varrho\, p_2 = \varrho\, p_{31} = x_3 y_1 - y_1 x_3 \\ \varrho\, p_3 = \varrho\, p_{12} = x_1 y_2 - y_1 x_2 \\ \varrho\, p_4 = \varrho\, p_{14} = x_1 y_4 - y_1 x_4 \\ \varrho\, p_5 = \varrho\, p_{24} = x_2 y_4 - y_2 y_4 \\ \varrho\, p_6 = \varrho\, p_{34} = x_3 y_4 - y_3 x_4, \end{array}\right.$	(1′) $\left\{\begin{array}{l} \sigma\, q_1 = \sigma\, q_{23} = u_2 v_3 - v_2 u_3 \\ \sigma\, q_2 = \sigma\, q_{31} = u_3 v_1 - v_3 u_1 \\ \sigma\, q_3 = \sigma\, q_{12} = u_1 v_2 - v_1 u_2 \\ \sigma\, q_4 = \sigma\, q_{14} = u_1 v_4 - v_1 u_4 \\ \sigma\, q_5 = \sigma\, q_{24} = u_2 v_4 - v_2 u_4 \\ \sigma\, q_6 = \sigma\, q_{34} = u_3 v_4 - v_3 u_4 \end{array}\right.$
wo x_1, x_2, x_3, x_4 und y_1, y_2, y_3, y_4 die Tetraederkoordinaten zweier Punkte der Geraden und ϱ einen willkürlichen, von Null verschiedenen Faktor bezeichnen.	wo u_1, u_2, u_3, u_4 und v_1, v_2, v_3, v_4 die Tetraederkoordinaten zweier sich in den Geraden schneidenden Ebenen und σ einen willkürlichen, von Null verschiedenen Faktor bezeichnen.

Es ist identisch:

(2) $$P = p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6 = 0$$

(2′) $$Q = q_1 q_4 + q_2 q_5 + q_3 q_6 = 0$$

so dass die sechs Linienkoordinaten, da es nur auf ihre Verhältnisse ankommt, für vier zählen. Zwischen den Strahlen- und Achsenkoordinaten einer und derselben Geraden gilt die Relation:

(3) $$p_1 : p_2 : p_3 : p_4 : p_5 : p_6 = q_4 : q_5 : q_6 : q_1 : q_2 : q_3$$

Die Bedingungen, dass ein Punkt x auf einer Geraden p liegt, sind:

(4)
$$\begin{aligned} U_1 &= p_6 x_2 - p_5 x_3 + p_1 x_4 = 0 \\ U_2 &= -p_6 x_1 + p_4 x_3 + p_2 x_4 = 0 \\ U_3 &= p_5 x_1 - p_4 x_2 - p_3 x_4 = 0 \\ U_4 &= -p_1 x_1 - p_2 x_2 - p_3 x_3 = 0 \end{aligned}$$

Die Bedingungen, dass eine Ebene u eine Gerade q enthält, sind:

(4′)
$$\begin{aligned} V_1 &= q_6 u_2 - q_5 u_3 + q_1 u_4 = 0 \\ V_2 &= -q_6 u_1 + q_4 u_3 - q_2 u_4 = 0 \\ V_3 &= q_5 u_1 - q_4 u_2 - q_3 u_4 = 0 \\ V_4 &= -q_1 u_1 - q_2 u_2 - q_3 u_3 = 0 \end{aligned}$$

In diesen Formeln, wie überall späterhin, können natürlich nach (3) die p durch die q, und umgekehrt, ersetzt werden.

Die Bedingungen (4) bezw. (4′) zählen nur für zwei; es folgt z. B. aus $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, dass $U_3 = 0$ und $U_4 = 0$, wegen der Gleichungen

$U_1 p_4 + U_2 p_5 = -U_3 p_6$ und $U_1 p_2 - U_2 p_1 = -U_4 p_6$.

Es gibt im Raume ∞^4 gerade Linien, daher bezeichnet eine Gleichung zwischen den Linienkoordinaten eine Mannigfaltigkeit von ∞^3 Geraden, einen Komplex; zwei Gleichungen eine solche von ∞^2 Geraden, eine

Kongruenz, und drei Gleichungen eine von ∞^1 Geraden, eine Linienfläche; und zwar ist die Gleichung derselben vom Grade $2\,l\,m\,n$,[1] wenn l, m, n die Ordnungen der gegebenen Komplexe sind. Also ist die durch drei lineare Komplexe bestimmte Fläche vom zweiten Grade. Der lineare Komplex hat die Form:

$$a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 p_4 + a_5 p_5 + a_6 p_6 = 0;$$

er ist ein spezieller, wenn:

$$a_1 a_4 + a_2 a_5 + a_3 a_6 = 0,$$

d. h. wenn die Koeffizienten selbst Linienkoordinaten sind.

Da nun die Bedingung, dass zwei Geraden p und p′ sich schneiden,

$$p_4' p_1 + p_5' p_2 + p_6' p_3 + p_1' p_4 + p_2' p_5 + p_3' p_6 = 0$$

ist, so kann die Gleichung des speziellen linearen Komplexes als Gleichung einer geraden Linie, gegeben durch alle sie schneidenden Geraden, aufgefasst werden.

Bei Plücker selbst haben alle diese Gleichungen etwas andere Formen, da er nicht die homogenen, sondern gewöhnliche kartesische Koordinaten anwendet. Es tritt also an die Stelle von

$$(5)\quad \begin{cases} x_1, x_2, x_3, x_4 & \text{bei Plücker } x, y, z\ 1 \\ u_1, u_2, u_3, u_4 & u, v, w, 1 \\ p_1, p_2, p_3, p_4\ p_5, p_6 & r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, 1 \\ q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6 & s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, 1 \end{cases}$$

§ 5.

Die Plücker'schen Ableitungen der Linienflächen 2. Ordnung aus drei linearen Komplexen.[2]

In der „Neuen Geometrie" Plückers finden sich zwei Ableitungen der Linienflächen 2. Ordnung aus

1) Plücker, Neue Geometrie des Raumes p. 20 u. 21, 1868.

2) J. Plücker, Neue Geometrie des Raumes. 1868 p. 121, 122 und p. 129. 138/139.

drei linearen Komplexen, von denen die zweite allerdings weniger wichtig ist; auch ist das Grundprinzip dasselbe wie bei der ersten.

Die erste Aufgabe ist insofern spezialisiert, als die drei gegebenen Komplexe als spezielle vorausgesetzt werden. Das Koordinatensystem wird so angenommen, dass die drei Axen der Komplexe in den Koordinatenebenen liegen. Dann sind die Gleichungen der Komplexe von der Form:

$$(1)\qquad \begin{cases} C_a = a_2 r_2 + a_3 r_3 + a_4 r_4 = 0 \\ C_b = b_1 r_1 + b_3 r_3 + b_5 r_5 = 0 \\ C_c = c_1 r_1 + c_2 r_2 + c_6 = 0 \end{cases}$$

Es handelt sich also jetzt darum, die Gleichung der Fläche zu finden, welche aus den Linien besteht, die diesen drei Komplexen gemeinsam sind, und zwar in Punktkoordinaten; d. h. der Punkt x, y, z, (1) soll auf einer Geraden liegen, die den drei Komplexen angehört. Die Bedingung, dass ein Punkt auf einer Geraden liegt, heisst in kartesischen Koordinaten nach § 3, (4) und (5)

$$(2)\qquad \begin{cases} U_1' = \quad y - r_5 z + r_1 = 0 \\ U_2' = -x \quad + r_4 z + r_2 = 0 \\ U_3' = r_5 x - r_4 y \quad + r_3 = 0 \\ U_4' = -r_1 x - r_2 y - r_3 z = 0 \end{cases}$$

Hierzu kommt noch die Bedingung

$$(3)\qquad r_1 r_4 + r_2 r_5 + r_3 = 0$$

Wir haben also aus den 8 Gleichungen (1), (2), (3), die aber nur für sechs zählen, die 5 Grössen r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 zu eliminieren. (3) folgt aber aus drei der Gleichungen (2); denn es ist:

$$U_1' r_4 + U_2' r_5 + U_3' = r_1 r_4 + r_2 r_5 + r_3$$

auch $U_4' = o$ folgt, wie oben gezeigt, aus $U_1' = o$ und $U_2' = o$, sodass wir uns auf (1) und die drei ersten Gleichungen (2) bei der Elimination beschränken können.

Aus der dritten Gleichung (2) setzen wir $r_3 = r_4 y - r_5 x$ in die beiden ersten Gleichungen (1) ein:

$$a_2 r_2 + a_3 (r_4 y - r_5 x) + a_4 r_4 = o$$
$$b_1 r_1 + b_3 (r_4 y - r_5 x) + b_5 r_5 = o$$

Hieraus setzen wir:

$$r_1 = - \frac{b_3 (r_4 y - r_5 x) + b_5 r_5}{b_1}$$

$$r_2 = - \frac{a_3 (r_4 y - r_5 x) + a_4 r_4}{a_2}$$

in die drei übrigen Gleichungen ein:

$$(4) \quad - c_1 \frac{b_3 (r_4 y - r_5 x) + b_5 r_5}{b_1} - c_2 \frac{a_3 (r_4 y - r_5 x) + a_4 r_4}{a_2} + c_6 = o$$

$$- x + r_4 z - \frac{a_3 (r_4 y - r_5 x) + a_4 r_4}{a_2} = o$$

$$y - r_5 z - \frac{b_3 (r_4 y - r_5 x) + b_5 r_5}{b_1} = o$$

Aus diesen drei Gleichungen sind also noch r_4 und r_5 zu eliminieren. Wir ordnen die beiden letzten nach r_4 und r_5:

$$(a_2 z - a_3 y - a_4) r_4 + a_3 x r_5 - a_2 x = o$$
$$- b_3 y r_4 + (b_3 x - b_1 z - b_5) r_5 + b_1 y = o$$

die obere Gleichung mit $b_3 y$, die untere mit $(a_2 z - a_3 y - a_4)$ multipliziert, addiert, gibt:

$$\left\{ a_3 b_3 x y + (a_2 z - a_3 y - a_4)(b_3 x - b_1 z - b_5) \right\} r_5$$
$$- a_2 b_3 x y + a_2 b_1 y z - a_3 b_1 y^2 - a_4 b_1 y = o$$

$$r_5 = \frac{a_2 b_3 x y - a_2 b_1 y z + a_3 b_1 y^2 + a_4 b_1 y}{a_2 b_3 z x - a_2 b_1 z^2 - a_2 b_5 z + a_3 b_1 y z + a_3 b_5 y - a_4 b_3 x + a_4 b_1 z + a_4 b_5}$$

in analoger Weise erhält man:

$$r_4 = \frac{a_3 b_1 x y - a_2 b_1 z x + a_2 b_3 x^2 - a_2 b_5 x}{a_2 b_3 z x - a_2 b_1 z^2 - a_2 b_5 z + a_3 b_1 y z + a_3 b_5 y - a_4 b_3 x - a_4 b_1 z - a_4 b_5}$$

Werden diese Ausdrücke für r_4 und r_5 in (4) eingesetzt, so erhält man die Gleichung der gesuchten Fläche.

$$\begin{aligned}
&- a_2 c_1 \Big\{ b_3 \Big((a_3 b_1 x y - a_2 b_1 z x - a_2 b_3 x^2 - a_2 b_5 x) y \\
&\qquad - (a_2 b_3 x y - a_2 b_1 y z + a_3 b_1 y^2 + a_4 b_1 y) x \Big) \\
&+ b_5 (a_2 b_3 x y - a_2 b_1 y z + a_3 b_1 y^2 + a_4 b_1 y) \Big\} \\
&- b_1 c_2 \Big\{ a_3 \Big((a_3 b_1 x y - a_2 b_1 z x - a_2 b_3 x^2 - a_2 b_5 x) y \\
&\qquad - (a_2 b_3 x y - a_2 b_1 y z - a_3 b_1 y^2 - a_4 b_1 y) x \Big) \\
&\qquad + a_4 (a_3 b_1 x y - a_2 b_1 z x + a_2 b_3 x^2 - a_2 b_5 x) \Big\} \\
&+ a_2 b_1 c_6 \Big\{ a_2 b_3 z x - a_2 b_1 z^2 - a_2 b_5 z + a_3 b_1 y z \\
&\qquad + a_3 b_5 y - a_4 b_3 x + a_4 b_1 z + a_4 b_5 \Big\} = 0
\end{aligned}$$

Diese Gleichung vereinfacht sich, indem die Glieder, welche in x, y, z vom dritten Grade sind, sich wegheben.

$$\begin{aligned}
(5)\quad & a_4 b_3 c_2 x^2 + a_3 b_5 c_1 y^2 + a_2 b_1 c_6 z^2 - (a_3 b_1 c_6 \\
& \qquad + a_2 b_5 c_1) y z - (a_2 b_3 c_6 + a_4 b_1 c_2) z x \\
& - (a_4 b_3 c_1 + a_3 b_5 c_2) x y - a_4 (b_5 c_2 - b_3 c_6) x \\
& - b_5 (a_3 c_6 - a_4 c_1) y - c_6 (a_4 b_1 - a_2 b_5) z - a_4 b_5 c_6 = 0
\end{aligned}$$

Dividieren wir (5) durch $a_4\, b_5\, c_6$ und setzen:

$$\frac{a_2}{a_1} = A \;,\quad \frac{b_3}{b_5} = B \;,\quad \frac{c_1}{c_6} = C$$

$$\frac{a_3}{a_4} = A' \;,\quad \frac{b_1}{b_5} = B' \;,\quad \frac{c_2}{c_6} = C'$$

so erhalten wir schliesslich als Gleichung der gesuchten Fläche:

$$(6)\quad B\,C'\,x_2 + C\,A'\,y_2 + A\,B'\,z^2 - (A'\,B' + C\,A)\,y\,z - (B'\,C' + A\,B)\,z\,x - (C'\,A' + B\,C)\,x\,y - (C' - B)\,x - (A' - C)\,y - (B' - A)\,z - 1 = 0$$

Die duale Behandlung lassen wir hier, wie auch späterhin, fort, da sie sich ohne weiteres aus der gegebenen ergibt. Es folgt jetzt sofort die zweite Lösung Plückers.

Es werden jetzt drei Komplexe angenommen, deren Axen durch einen Punkt gehen, auf einander rechtwinklig stehen und als Koordinatenaxen gewählt sind.

Dann sind ihre Gleichungen von der Form:[1]

$$(7)\quad \begin{cases} C_1 = r_1 + k_1\, r_4 = 0 \\ C_2 = r_2 + k_2\, r_5 = 0 \\ C_3 = r_3 + k_3 = 0 \end{cases}$$

Die Bedingungen, dass ein Punkt auf einer Geraden liegt, waren:

$$(2)\quad \begin{cases} y - r_5\, z + r_1 = 0 \\ -x + r_4\, z + r_2 = 0 \\ r_5\, x - r_4\, y + r_3 = 0 \\ -r_1\, x - r_2\, y - r_3\, z = 0 \end{cases}$$

Durch Elimination von r_1, r_2, r_3 aus den drei ersten Gleichungen (2) und aus (7) ergibt sich:

1) Plücker, N. G. d. R. p. 37.

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} r_5\,z - y + k_1\,r_4 = 0 \\ x - r_4\,z + k_2\,r_5 = 0 \\ r_4\,y - r_5\,x + k_3 = 0 \end{array}\right.$$

Aus (8) eliminieren wir r_4 und r_5, es ergibt sich leicht:

$$(k_2\,y + z\,x)\,y + (k_1\,x - y\,z)\,x + k_3\,(k_1\,k_2 + z^2) = 0$$

Schliesslich dividieren wir durch $k_1\,k_2\,k_3$ und erhalten als Gleichung der gesuchten Fläche:

$$(9)\qquad \frac{x^2}{k_2\,k_3} + \frac{y^2}{k_3\,k_1} + \frac{z^2}{k_1\,k_2} + 1 = 0$$

Diese Gleichung stellt je nach dem Werte von k_1, k_2, k_3 verschiedene Flächen dar, wie aus folgender Tabelle zu ersehen ist.

$k_1, k_2, k_3,$ alle $+$ / alle $-$ imaginäres Ellipsoid

$k_1 = i\,k_1'$, $k_2 = i\,k_2'$, $k_3 = i\,k_3'$ reelles Ellipsoid

$k_1 = -i\,k_1'$, $k_2 = i\,k_2'$, $k_3 = i\,k_3'$ zweischaliges Hyperboloid

$k_1 = i\,k_1'$, $k_2 = -i\,k_2'$, $k_3 = i\,k_3'$ Hyperboloid

$k_1 = \infty$ $\left\{\begin{array}{ll} k_2 \cdot k_3 = + & \text{imaginäres Ebenenpaar} \\ k_2 \cdot k_3 = - & \text{reelles Ebenenpaar.} \end{array}\right.$

Die Einführung der Linienkoordinaten durch Plücker bringt ein neues Moment für die Betrachtung der Linienflächen mit sich. Erst jetzt ist es möglich, die Linienfläche systematisch in die Reihe der Liniengebilde, Komplex, Kongruenz, Linienfläche, endliche Zahl von Linien, einzugliedern. Hieraus ergibt sich auch eine ganz neue Art ihrer Erzeugung, als diejenige Fläche, welche die dreien Komplexen gemeinsamen Geraden enthält.

Plücker selbst hat allerdings diese Aufgabe noch

nicht allgemein gelöst, da er durch den Gebrauch nicht homogener Koordinaten, um das Eliminationsverfahren nicht allzu kompliziert werden zu lassen, genötigt wurde, speziell gelegene Koordinatensysteme anzunehmen. Dennoch hat Plückers Lösung den Vorzug, den natürlichsten Weg eingeschlagen zu haben; nämlich die gesuchte Gleichung als Eliminationsresultat der Linienkoordinaten aus den drei gegebenen Komplexgleichungen, den Bedingungen für das Zusammenfallen von Punkt und Gerader und der identischen Relation $p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6 = 0$ aufzufassen.

§ 6.

Methoden der Auffassung der Komplexe als reziproker Verwandtschaften.

Die erste allgemeine Lösung mittels homogener Koordinaten hat Gordan gegeben.[1] Seine Methode ist folgende:

Die Komplexe sind gegeben in der Form:

(1) $C_a = \Sigma a_{ik} q_{ik} = 0$, $C_b = \Sigma b_{i\bar{k}} q_{ik} = 0$, $C_c = \Sigma c_{ik} q_{ik} = 0$

Hier durchlaufen die ik die Reihe:

23, 31, 12, 14, 24, 34.

Gleichzeitig durchlaufen die $i\bar{k}$ die Reihe:

14, 24, 34, 23, 31, 12.

Die in (1) in Achsenkoordinaten gegebenen Komplexe sind in Strahlenkoordinaten, abgesehen von konstanten Faktoren:

(2) $C_a = \Sigma a_{ik} p_{ik} = 0$, $C_b = \Sigma b_{ik} p_{ik} = 0$, $C_c = \Sigma c_{ik} p_{ik} = 0$

Halten wir in den Komplexen $C_a = 0$ und $C_b = 0$ in (2) den Punkt x fest, so sind es die Gleichungen

1) Zeitschr. für Mathematik u. Physik, Bd. 13 p. 62, 63 1868.

zweier Ebenen in laufenden Koordinaten y, und die Koordinaten der Ebenen sind, da ja die Gleichungen in y_1, y_2, y_3, y_4 linear und homogen sind:

$$\frac{\partial C_a}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial C_a}{\partial y_2}, \quad \frac{\partial C_a}{\partial y_3}, \quad \frac{\partial C_a}{\partial y_4}$$

und

$$\frac{\partial C_b}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial C_b}{\partial y_2}, \quad \frac{\partial C_b}{\partial y_3}, \quad \frac{\partial C_b}{\partial y_4}$$

Die Koordinaten der Schnittgeraden beider Ebenen sind also:

$$\rho\, q_{ik} = \frac{\partial C_a}{\partial y_i}\frac{\partial C_b}{\partial y_k} - \frac{\partial C_b}{\partial y_i}\frac{\partial C_a}{\partial y_k} \tag{3}$$

Diese Gerade gehört den beiden Komplexen $C_a = 0$ und $C_b = 0$ an; soll sie auch noch dem dritten Komplexe $C_c = 0$ angehören, so müssen ihre Koordinaten seiner Gleichung genügen.

Die Bedingung also, dass eine Gerade auf den drei gegebenen Komplexen liegt, d. h. die Gleichung der gesuchten Fläche, ist:

$$\Sigma c_{ik}\left(\frac{\partial C_a}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial C_b}{\partial y_k} - \frac{\partial C_b}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial C_a}{\partial y_k}\right) = 0 \tag{4}$$

Gordan vereinfacht diese Gleichungen noch, indem er so schliesst: die beiden Teile des Ausdrucks (4)

$$\Sigma c_{ik}\frac{\partial C_a}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial C_b}{\partial y_k} \text{ und } -\Sigma c_{ik}\frac{\partial C_b}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial C_a}{\partial y_k}$$

stimmen überein, da sie durch Vertauschung der Indizes in einander übergehen. Dies ist jedoch kein hinreichender Grund für die Gleichheit; auch sind die beiden Teile tatsächlich, wie ihre Betrachtung zeigt, verschieden. Demnach ist auch die daraus gefolgerte Schlussgleichung

$$\Sigma c_{ik}\frac{\partial C_a}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial C_b}{\partial y_k} = 0$$

nicht richtig, sondern wir müssen bei (4) stehen bleiben.

Die Gordansche Methode ist den beiden folgenden allgemeinen Lösungen gegenüber dadurch ausgezeichnet, dass die abgeleitete Flächengleichung direkt vom zweiten Grade ist, ohne dass ein Fortschaffen von Faktoren nötig wird.

Eine der Gordanschen verwandte Lösung, in welcher jedoch die drei gegebenen Komplexe symmetrisch behandelt werden, wurde von verschiedenen Mathematikern; zuerst von Cayley, gegeben.

Die Gleichungen der gegebenen Komplexe seien:

$$(5)\quad \begin{cases} C_a = a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 p_4 + a_5 p_5 + a_6 p_6 = 0 \\ C_b = b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 + b_4 p_4 + b_5 p_5 + b_6 p_6 = 0 \\ C_c = c_1 p_1 + c_2 p_2 + c_3 p_3 + c_4 p_4 + c_5 p_5 + c_6 p_6 = 0 \end{cases}$$

Halte ich in (5) den Punkt x fest und ordne nach y, so erhalte ich die Gleichungen von drei Ebenen in laufenden Koordinaten y:

$$(6)\quad \begin{cases} (a_2 x_3 - a_3 x_2 - a_4 x_4) y_1 + (a_3 x_1 - a_1 x_3 - a_5 x_4) y_2 \\ + (a_1 x_2 - a_2 x_1 - a_6 x_4) y_3 + (a_4 x_1 + a_5 x_2 + a_6 x_3) y_4 = 0 \\ (b_2 x_3 - b_3 x_2 - b_4 x_4) y_1 + (b_3 x_1 - b_1 x_3 - b_5 x_4) y_2 \\ + (b_1 x_2 - b_2 x_1 - b_6 x_4) y_3 + (b_4 x_1 + b_5 x_2 + b_6 x_3) y_4 = 0 \\ (c_2 x_3 - c_3 x_2 - c_4 x_4) y_1 + (c_3 x_1 - c_1 x_3 - c_5 x_4) y_2 \\ + (c_1 x_2 - c_2 x_1 - c_6 x_4) y_3 + (c_4 x_1 + c_5 x_2 + c_6 x_3) y_4 = 0 \end{cases}$$

Soll der Punkt x auf der Fläche liegen, so müssen die drei Ebenen (6) durch eine Gerade gehen. Denn durch einen Punkt der Fläche geht immer nur eine Gerade aus einer Erzeugendenschar; alle Geraden der drei Komplexe, die durch diesen Punkt gehen, liegen in den drei Ebenen (6). Also muss die eine Gerade,

da sie allen drei Komplexen angehören soll, den drei Ebenen (6) gemeinsam sein. Die Gleichungen (6) müssen also nicht eine, sondern unendlich viele Lösungen haben; d. h. die vier Determinanten der Matrix müssen verschwinden, z. B.:

$$(7)\ \Delta = \begin{vmatrix} a_2x_3 - a_3x_2 - a_4x_4 & a_3x_1 - a_1x_3 - a_5x_4 & a_1x_2 - a_2x_1 - a_6x_4 \\ b_2x_3 - b_3x_2 - b_4x_4 & b_3x_1 - b_1x_3 - b_5x_4 & b_1x_2 - b_2x_1 - b_6x_4 \\ c_2x_3 - c_3x_2 - c_4x_4 & c_3x_1 - c_1x_3 - c_5x_4 & c_1x_2 - c_2x_1 - c_6x_4 \end{vmatrix} = 0$$

Von derselben Form ergeben sich noch drei andere Gleichungen. Die Determinante (7) lässt sich nach bekanntem Gesetz in 27 Einzeldeterminanten zerlegen, welche die Form haben:

$$(8)\qquad x_f\ x_g\ x_h \begin{vmatrix} a_i & a_k & a_l \\ b_i & b_k & b_l \\ c_i & c_k & c_l \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} i, k, l = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ f, g, h = 1, 2, 3, 4 \end{matrix}$$

Von diesen 27 Determinanten fallen jedoch 11 weg, indem sie teils wegen Gleichheit zweier Kolonnen null werden, teils sich wegheben. Durch die übrigen 16 ausgedrückt, erhält die Gleichung (7), wenn wir der Kürze halber die Determinante in (8) mit (i k l) bezeichnen, die Form:

---

1) Cayley, Mathematische Annnalen, 4 p. 558, 1871. Pasch, Journal für Mathematik, 75 p. 131 u. f. 1873. Salmon-Fiedler, Geometrie des Raumes, 2. Aufl. Bd. 1 p. 124, 1874. Doehlemann, Archiv für Mathematik, (2) 17 p. 166, 1899.

$$(9)\quad x_4\Big\{(234)\,x_1^2+(315)\,x_2^2+(126)\,x_3^2+(456)\,x_4^2$$
$$+\Big[(125)+(316)\Big]\,x_2x_3+\Big[(236)+(124)\Big]\,x_3x_1$$
$$+\Big[(314)+(235)\Big]\,x_1x_2+\Big[(245)-(364)\Big]\,x_1x_4$$
$$+\Big[(356)-(145)\Big]\,x_2x_4+\Big[(164)-(256)\Big]\,x_3x_4\Big\}=0$$

Durch gleiche Behandlung der drei, (7) entsprechenden Gleichungen erhält man, wenn wir den Inhalt der geschweiften Klammer in (9) mit K bezeichnen:

$$x_3\,.\,K=0,\quad x_2\,.\,K=0,\quad x_1\,.\,K=0$$

Da nun aber nicht x_1 , x_2 , x_3 , x_4 zugleich null sein können, muss K verschwinden, und die Gleichung der gesuchten Fläche ist:

$$(10)\quad (234)\,x_1^2+(315)\,x_2^2+(126)\,x_3^2+(456)\,x_4^2$$
$$+\Big[(125)+(316)\Big]\,x_2x_3+\Big[(236)+(124)\Big]\,x_3x_1$$
$$+\Big[(314)+(235)\Big]\,x_1x_2+\Big[(245)-(364)\Big]\,x_1x_4$$
$$+\Big[(356)-(145)\Big]\,x_2x_4+\Big[(164)-(256)\Big]\,x_3x_4=0$$

§ 7.

Die Ableitung der Komplexgleichung der Fläche.

Die Gleichung eines Linienkomplexes kann als Gleichung einer Fläche aufgefasst werden, wenn man diese als von den Linien des Komplexes umhüllt vorstellt. Die Gleichung der Fläche zweiter Ordnung ist auch in Linienkoordinaten vom zweiten Grade und wurde zuerst von Plücker aus der Punktkoordinaten-

gleichung abgeleitet.[1] Eine Ableitung unmittelbar aus den Gleichungen dreier gegebenen Komplexe fanden gleichzeitig Klein[2] und Pasch.[3] Wir geben hier die Klein'sche Lösung, mit welcher diejenige von Pasch im wesentlichen übereinstimmt.

Klein benutzt die Linienkoordinaten p_i, welche, wenn wir die früher gebrauchten mit π_i bezeichnen, durch folgende Formeln definiert sind:

$$\pi_1 = p_1 + i\,p_4 \;;\; \pi_2 = p_2 + i\,p_5 \;;\; \pi_3 = p_3 + i\,p_6$$
$$\pi_4 = p_1 - i\,p_4 \;;\; \pi_5 = p_2 - i\,p_5 \;;\; \pi_6 = p_3 - i\,p_6,$$

und versteht unter der Invariante eines linearen Komplexes

$$C_a = a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 p_4 + a_5 p_5 + a_6 p_6 = 0$$

den Ausdruck

$$J_{aa} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2,$$

und unter der simultanen Invariante zweier Komplexe

$$C_b = b_1 p_1 + b_2 p_2 + \ldots + b_6 p_6 = 0$$
$$C_c = c_1 p_1 + c_2 p_2 + \ldots + c_6 p_6 = 0$$

den Ausdruck

$$J_{bc} = J_{cb} = b_1 c_1 + b_2 c_2 + \ldots + b_6 c_6$$

Das Verschwinden der Invariante bedeutet, dass der betreffende Komplex ein spezieller ist.

Es seien nun gegeben die vier Komplexe:

$$(1) \quad \begin{cases} C_a = a_1 p_1 + a_2 p_2 + \ldots a_6 p_6 = 0 \\ C_b = b_1 p_1 + b_2 p_2 + \ldots b_6 p_6 = 0 \\ C_c = c_1 p_1 + c_2 p_2 + \ldots c_6 p_6 = 0 \\ C_d = d_1 p_1 + d_2 p_2 + \ldots d_6 p_6 = 0 \end{cases}$$

1) Plücker, N. G. d. R. p. 256 u. f.

2) Mathematische Annalen II, p. 208, 1869 und V, p. 284, 1872.

3) Journal für Mathematik 75, p. 140 u. f.

Diese bestimmen die viergliedrige Gruppe:

$$(2) \qquad \lambda C_a + \mu C_b + \nu C_c + \rho C_d = 0$$

Setzen wir die Invariante derselben gleich null, so haben wir die Gleichung, welche die speziellen Komplexe der Gruppe gibt:

$$(\lambda a_1 + \mu b_1 + \nu c_1 + \rho d_1)^2 + (\lambda a_2 + \mu b_2 + \nu c_2 + \rho d_2)^2 + \ldots + (\lambda a_6 + \mu b_6 + \nu c_6 + \rho d_6) = 0$$

nach λ, μ, ν, ρ geordnet:

$$(3) \quad J_{aa}\lambda^2 + J_{bb}\mu^2 + J_{cc}\nu^2 + J_{dd}\rho^2 + 2J_{bc}\mu\nu + 2J_{ca}\nu\lambda + 2J_{ab}\lambda\mu + 2J_{ad}\lambda\rho + 2J_{bd}\mu\rho + 2J_{cd}\nu\rho = 0$$

Die Gruppe (2) enthält also im allgemeinen ∞^2 spezielle Komplexe. Betrachten wir in der Gleichung (3) λ, μ, ν, ρ als laufende Punkt- oder Ebenenkoordinaten so stellt sie eine Fläche zweiter Ordnung bezw. Klasse dar. Die Determinante derselben ist:

$$(4) \qquad D = \begin{vmatrix} J_{aa} & J_{ab} & J_{ac} & J_{ad} \\ J_{ba} & J_{bb} & J_{bc} & J_{bd} \\ J_{ca} & J_{cb} & J_{cc} & J_{cd} \\ J_{da} & J_{db} & J_{dc} & J_{dd} \end{vmatrix}$$

Verschwindet D, so ist die Fläche ein Kegel, bezw. Kegelschnitt, und die beiden, den vier Komplexen gemeinsamen Geraden fallen in eine zusammen,[1] d. h. diese Gerade wird Tangente an das durch drei der Komplexe bestimmte Hyperboloid.

Nehme ich daher den vierten Komplex $C_d = 0$ als speziellen, so dass $J_{dd} = 0$, und die Koordinaten desselben als laufende p_i, so dass:

---

1) Cayley, On the six coordinates of a line [1867], Cambridge, Phil. Soc. Trans. XI, (pt. 2) 1869.

$$J_{ad} = C_a \; ; \; J_{bd} = C_b \; ; \; J_{cd} = C_c,$$

so ist die Gleichung der durch C_a, C_b, C_c bestimmten Fläche in Linienkoordinaten:

(5)
$$\begin{vmatrix} J_{aa} & J_{ab} & J_{ac} & C_a \\ J_{ba} & J_{bb} & J_{bc} & C_b \\ J_{ca} & J_{cb} & J_{cc} & C_c \\ C_a & C_b & C_e & o \end{vmatrix} = o$$

Die Bedingung $D = o$ lässt sich rein algebraisch in folgender Weise ableiten. Sollen die beiden den vier Komplexen (1) gemeinsamen Geraden zusammenfallen, so ist dazu notwendig und hinreichend, dass die Diskriminante der quadratischen Gleichung, welche man durch Elimination der p_i aus den Gleichungen (1) und der identischen Relation

(6)
$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 = o$$

erhält, verschwindet. Zur Elimination verfahren wir so: zu den Gleichungen (1) fügen wir die beiden Gleichungen

$$p_1 = p_1 \text{ und } p_4 = p_4$$

hinzu, sodass wir sechs in den sechs p_i lineare und homogene Gleichungen haben. Ihre Determinante ist:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 \\ 1 & o & o & o & o & o \\ o & o & o & 1 & o & o \end{vmatrix}$$

Die Unterdeterminanten mögen mit Δ_{ik} bezeichnet werden. Es ergibt sich:

$$\Delta \cdot p_1 = p_1 \cdot \Delta_{51} + p_4 \Delta_{61}$$
$$\Delta \cdot p_2 = p_1 \Delta_{52} + p_4 \Delta_{62}$$
$$\vdots$$
$$\Delta \cdot p_6 = p_1 \Delta_{56} + p_4 \Delta_{66}$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung (5) ein, so erhält man:

$$\frac{(p_1 \cdot \Delta_{51} + p_4 \Delta_{61})^2 + (p_1 \Delta_{52} + p_4 \Delta_{62})^2 + \ldots + (p_1 \Delta_{56} + p_4 \Delta_{66})^2}{\Delta^2} = 0$$

Setzt man $\frac{p_1}{p_4} = x$, so ergibt sich, nach x geordnet, die quadratische Gleichung:

$$(\Delta_{51}^2 + \Delta_{52}^2 + \ldots + \Delta_{56}^2)\, x^2 + 2(\Delta_{51}\Delta_{61} + \Delta_{52}\Delta_{62} + \ldots + \Delta_{56}\Delta_{66})\, x + (\Delta_{61}^2 + \Delta_{62} + \ldots + \Delta_{66}^2) = 0,$$

und die Bedingung, dass die beiden Geraden zusammenfallen, ist:

$$(\Delta_{51}\Delta_{61} + \Delta_{52}\Delta_{62} + \ldots + \Delta_{56}\Delta_{66})^2 - (\Delta_{51}^2 + \Delta_{52}^2 + \ldots + \Delta_{56}^2)(\Delta_{61}^2 \Delta_{62}^2 + \ldots + \Delta_{66}^2) = 0$$

Dieser Ausdruck reduziert sich auf eine Summe von 15 Quadraten:

$$(\Delta_{52}\Delta_{63} - \Delta_{53}\Delta_{62})^2 + (\Delta_{53}\Delta_{61} - \Delta_{51}\Delta_{63})^2 + \ldots = 0$$

Wir können also jedes der 15 Glieder einzeln gleich Null setzen, z. B.:

$$\Delta_{51}\Delta_{64} - \Delta_{54}\Delta_{61} = 0$$

Schreiben wir dies aus und vervollständigen die Determinanten auf den sechsten Grad, so ergiebt sich, indem das zweite Glied verschwindet:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Nach dem Multiplikationstheorem der Determinanten:

$$\begin{vmatrix} J_{aa} & J_{ab} & J_{ac} & J_{ad} & a_1 & a_4 \\ J_{ba} & J_{bb} & J_{bc} & J_{bd} & b_1 & b_4 \\ J_{ca} & J_{cb} & J_{cc} & J_{cd} & c_1 & c_4 \\ J_{da} & J_{db} & J_{dc} & J_{dd} & d_1 & d_4 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & 0 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Entwickelt man diese Determinante, welche durch Vertauschung der beiden letzten Kolonnen, bezw. Zeilen, symmetrisch wird, und berücksichtigt die Werte der J_{ik}, so sieht man, dass sich alle Glieder wegheben, ausser der Determinante (4), welche in -1 multipliziert ist.

Wir haben also die gesuchte Bedingung:

$$D = \begin{vmatrix} J_{aa} & J_{ab} & J_{ac} & J_{ad} \\ J_{ba} & J_{bb} & J_{bc} & J_{bd} \\ J_{ca} & J_{cb} & J_{cc} & J_{cd} \\ J_{da} & J_{db} & J_{dc} & J_{dd} \end{vmatrix} = 0$$

§ 8.

Die Plücker'sche Methode in neuerer Bezeichnung.

In der folgenden Lösung ist unter Anwendung von Tetraederkoordinaten die Plückersche Methode wiederaufgenommen, wodurch dieselbe in algebraischer Beziehung vervollkommnet und unbeschränkt allgemein wird.

Die drei Komplexe seien gegeben in der Form:

$$(1)\quad \begin{cases} C_a = a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 p_4 + a_5 p_5 + a_6 p_6 = 0 \\ C_b = b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 + b_4 p_4 + b_5 p_5 + b_6 p_6 = 0 \\ C_c = c_1 p_1 + c_2 p_2 + c_3 p_3 + c_4 p_4 + c_5 p_5 + c_6 p_6 = 0 \end{cases}$$

Die Bedingungen, dass ein Punkt x auf einer Geraden p liegt, sind nach § 3, (4):

$$(2)\quad \begin{cases} U_1 = \quad p_6 x_2 - p_5 x_3 + p_1 x_4 = 0 \\ U_2 = -p_6 x_1 \quad + p_4 x_3 + p_2 x_4 = 0 \\ U_3 = \quad p_5 x_1 - p_4 x_2 \quad + p_3 x_4 = 0 \\ U_4 = -p_1 x_1 - p_2 x_2 - p_3 x_3 \quad = 0 \end{cases}$$

Zu diesen sieben Gleichungen kommt die identische Relation:

$$(3)\qquad P = p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6 = 0$$

Da die Gleichungen (2), wie in § 3 gesagt, nur für zwei zählen, haben wir aus acht, für sechs zählenden Gleichungen die sechs Variabeln p_i zu eliminieren. Die Gleichungen sind alle linear und homogen in den p_i ausser (3). Es zeigt sich aber, dass ähnlich wie in § 4, die Beziehung (3) bei der Elimination entbehrt werden kann, indem sie aus je dreien der Gleichungen (2) hervorgeht. Nach Fortlassung der Beziehung (3) können wir je drei Gleichungen (2) als von einander unabhängig betrachten. Wir haben die vier Gleichungen:

$$(4)\quad \begin{cases} U_1 p_4 + U_2 p_5 + U_3 p_6 = P \cdot x_4 \\ -U_1 p_2 + U_2 p_1 - U_4 p_6 = P \cdot x_3 \\ U_1 p_3 - U_3 p_1 - U_4 p_5 = P \cdot x_2 \\ -U_2 p_3 + U_3 p_2 - U_4 p_4 = P \cdot x_1 \end{cases}$$

Da nicht alle vier x Null werden können, so kann ich nach (4) aus (2) immer drei Gleichungen so wählen, dass (3) aus ihnen folgt. Wir haben also aus (1) und drei Gleichungen (2) die sechs p_i zu eliminieren, die Gleichungen sind linear und homogen, wir haben also, wenn wir z. B. die Gleichungen $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ nehmen:

$$(5)\qquad D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & -x_3 & x_2 \\ 0 & x_4 & 0 & x_3 & 0 & -x_1 \\ 0 & 0 & x_4 & -x_2 & x_1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Für die drei andern Kombinationen der Gleichungen $U_i = 0$ ergeben sich die drei unteren Zeilen:

$U_1 = 0,\ U_2 = 0,\ U_4 = 0$:
$$\begin{vmatrix} x_4 & 0 & 0 & 0 & -x_3 & x_2 \\ 0 & x_4 & 0 & x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_1 & -x_2 & -x_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$U_1 = 0,\ U_3 = 0,\ U_4 = 0$:
$$\begin{vmatrix} x_4 & 0 & 0 & 0 & -x_3 & x_2 \\ 0 & 0 & x_4 & -x_2 & x_1 & 0 \\ -x_1 & -x_2 & -x_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$U_2 = 0,\ U_3 = 0,\ U_4 = 0$:
$$\begin{vmatrix} 0 & x_4 & 0 & x_3 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & x_4 & -x_2 & x_1 & 0 \\ -x_1 & -x_2 & -x_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Die Gleichung (5) ist in den x_i anscheinend vom dritten Grade; sie enthält aber den Faktor x_4. Denn für $x_4 = 0$ wird die Gleichung erfüllt. Ebenso enthalten die andern Gleichungen der Reihe nach die Faktoren x_3, x_2, x_1; und zwar sind sie, wie die Entwickelung nach den Unterdeterminanten 3. Grades der drei letzten Zeilen zeigt, von der Form:

$$x_1 \,.\, K = 0;\ x_2 \,.\, K = 0;\ x_3 \,.\, K = 0;\ x_4 \,.\, K = 0,$$

von K denselben Wert hat, wie im vorigen Paragraphen. Ebenso wie dort ergiebt sich als Gleichung der gesuchten Fläche:

$$(6)\quad (234)\,x_1^2 + (315)\,x_2^2 + (126)\,x_3^2 + (456)\,x_4^2$$
$$+ \Big[(125) + (316)\Big]\,x_2 x_3 + \Big[(236) + (124)\Big]\,x_3 x_1$$
$$+ \Big[(314) + (235)\Big]\,x_1 x_2 + \Big[(245) - (364)\Big]\,x_1 x_4,$$
$$+ \Big[(356) - (145)\Big]\,x_2 x_4 + \Big[(164) - (256)\Big]\,x_3 x_4 = 0$$

Die aus der dualen Betrachtung sich ergebende Gleichung der Fläche in Ebenenkoordinaten erhält man, wenn man in den Kombinationen (ikl) der Gleichung (6) die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 bezw. mit 4, 5, 6, 1, 2, 3 vertauscht; also:

$$(7)\quad (561)\,u_1^2 + (642)\,u_2^2 + (453)\,u_3^2 + (123)\,u_4^2$$
$$+ \Big[(452) + (643)\Big]\,u_2 u_3 + \Big[(563) + (451)\Big]\,u_3 u_1$$
$$+ \Big[(641) + (562)\Big]\,u_1 u_2 + \Big[(512) - (631)\Big]\,u_1 u_4$$
$$+ \Big[(623) - (412)\Big]\,u_2 u_4 + \Big[(431) - (523)\Big]\,u_3 u_4 = 0$$

Die Gleichungen (5) dieses Paragraphen und (7) des vorigen müssen natürlich äquivalent sein; in der Tat lassen sich die Determinanten leicht in einander überführen. Multiplizieren wir nämlich in (5) die 2. und 3. Kolonne mit x_3, bezw. $-x_2$ und addieren sie zu der mit $-x_4$ multiplizierten 4. Kolonne, desgl. die 3. und 1. Kolonne, mit x_1, bezw. mit $-x_3$ multipliziert, zur fünften, und die 1. und 2. Kolonne, mit x_2, bezw. $-x_1$ multipliziert, zur sechsten, so ergibt sich:

$$(-x_4)^3 . D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_2x_3 - a_3x_2 - a_4x_4 & a_3x_1 - a_1x_3 - a_5x_4 & a_1x_2 - a_2x_1 - a_6x_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_2x_3 - b_3x_2 - b_4x_4 & b_3x_1 - b_1x_3 - b_5x_4 & b_1x_2 - b_2x_1 - b_6x_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_2x_3 - c_3x_2 - c_4x_4 & c_3x_1 - c_1x_3 - c_5x_4 & c_1x_2 - c_2x_1 - c_6x_4 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D = -\Delta$$

Um die möglichen Ausartungen der aus drei linearen Komplexen abgeleiteten Fläche zu untersuchen, betrachten wir die Determinanten der Flächen (6) und (7) A und A′. Es ist:

$$(8) \quad 16A = \begin{vmatrix} 2.(234) & (314)+(235) & (236)+(124) & (245)-(364) \\ (314)+(235) & 2.(315) & (125)+(316) & (356)-(145) \\ (236)+(124) & (125)+(316) & 2.(126) & (164)-(256) \\ (245)-(364) & (356)-(145) & (164)-(256) & 2.(456) \end{vmatrix}$$

Soll die Fläche ein Kegel werden, so kann das Koordinatentetraeder immer so angenommen werden, dass die Glieder mit einem der x_i, etwa die mit x_4, nicht vorkommen. Die Determinante wird dann:

$$\begin{vmatrix} 2.(234) & (314) & (235) & (236)+(124) & 0 \\ (314)+(235) & 2.(315) & (125+(316) & 0 \\ (236)+(124) & (125)+(316) & 2.(126) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Hier sind alle Unterdeterminanten 3. Grades null. Denn nach dem Multiplikationstheorem der Determinanten ist:

$$(9) \qquad (i\,k\,l) . (f\,g\,h) = (i\,k\,h)\,(f\,g\,l);$$

bezeichnen wir die dem Element der i^{ten} Zeile und k^{ten} Kolonne adjungierte Unterdeterminante mit A_{ik}, so heben sich nach (9) alle Glieder von A_{44} gegenseitig

weg, und die übrigen A_{ik} sind, wie man ohne weiteres sieht, alle null. Es folgt also zunächst, dass ein Kegel von drei Komplexen nicht erzeugt werden kann. Dasselbe gilt dual für den Kegelschnitt.

Es bleiben als mögliche Flächen noch die zerfallenden Flächen zweiter Ordnung, bez. zweiter Klasse. Jetzt kann das Koordinatentetraeder immer so angenommen werden, dass die Glieder mit zweien der x_i nicht vorkommen, z. B. diejenigen mit x_3 und x_4. Alle Unterdeterminanten zweiten Grades der Determinante (8) verschwinden, ausser:

$$(10)\quad \begin{vmatrix} 2\,.\,(234) & (314)+(235) \\ (314)+(235) & 2\,.\,(315) \end{vmatrix} = -\Big\{(314)-(235)\Big\}^2$$

Für die Determinante A der Fläche 2. Klasse ergibt sich:

$$A = \begin{vmatrix} (561) & (562) & (563) & (512) \\ (562) & (642) & (643) & (623) \\ (563) & (643) & (453) & \dfrac{(431)-(523)}{2} \\ (512) & (623) & \dfrac{(431)-(523)}{2} & (123) \end{vmatrix}$$

Auch hier verschwinden nach (9), und da $(562) = (641)$ u. s. w., alle Unterdeterminanten zweiten Grades bis auf

$$(11)\quad \begin{vmatrix} (453) & \dfrac{(431)-(523)}{2} \\ \dfrac{(431)-(523)}{2} & (123) \end{vmatrix} = -\Big\{(431)-(523)\Big\}^2$$

Die Ausdrücke (10) und (11) werden gleichzeitig null, sodass von den zerfallenden Flächen nur Ebenenpaar mit Punktepaar und Doppelebene mit Doppelpunkt möglich sind.

Bevor wir zur Umkehrung unserer Aufgabe übergehen, d. h. also aus der Gleichung einer gegebenen Fläche 2. Ordnung die sie erzeugenden linearen Komplexe bestimmen, wollen wir im folgenden Paragraphen eine Reihe von Determinantensätzen, die dazu nötig sind, zusammenstellen.

§ 9.

Einige Sätze aus der Determinantenlehre.

Wir gehen aus von der Determinante:

$$(1) \qquad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Die 16 Unterdeterminanten 3. Grades bezeichnen wir mit A_{ik} z. B.

$$(2) \qquad A_{12} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Die 36 Unterdeterminanten 2. Grades mit α_{ik}. z. B

$$(3) \qquad \alpha_{26} = \alpha_{31,34} = \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{13} & a_{14} \end{vmatrix} = - \alpha_{31,43} = \alpha_{13,43}$$

und zwar werden die Zeilen- und Kolonnenindizes in den bestimmten Kombinationen 23, 31, 12, 14, 24, 34 zusammengefasst, welche, wo es praktisch ist, in derselben Reihenfolge mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 bezeichnet werden. Die zu α_{ik} adjungierte Unterdeterminante wird mit α_{ik} bezeichnet. Die festgesetzte Reihenfolge hat den Vorzug, dass die Inversionszahlen der Indizes von

$\alpha_{lm,np}$ und $\alpha_{lm,np}$ immer gerade Zahlen sind, die $\alpha_{\overline{i}\,\overline{k}}$ also positiv.

Wir verwenden jetzt den aus der Determinantentheorie bekannten Satz

$$P_{\alpha\beta} = D^{\rho-1} \cdot q_{\overline{\alpha\beta}} \tag{4}$$

Hier bezeichnet D eine beliebige Determinante, $P_{\alpha\beta}$ die aus den, zu den Elementen einer Unterdeterminante ρ^{ten} Grades von D, $p_{\alpha\beta}$, gehörigen ersten Unterdeterminanten gebildete Determinante, und $q_{\overline{\alpha\beta}}$ die zu $p_{\alpha\beta}$ adjungierte Unterdeterminante. Diesen Satz wenden wir auf unsere Determinante A an und erhalten zwei Sätze, die nur durch Beispiele angedeutet sein mögen.

$$\rho = 3: \quad \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} = A^2 \cdot a_{11} \tag{5}$$

$$\rho = 2: \quad A_{44} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{14} \\ A_{41} & A_{44} \end{vmatrix} = A \cdot \alpha_{11} \tag{6}$$

Wir bilden jetzt aus den 36 α_{ik} die Determinante

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25} & \alpha_{26} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \alpha_{35} & \alpha_{36} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \alpha_{45} & \alpha_{46} \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} & \alpha_{55} & \alpha_{56} \\ \alpha_{61} & \alpha_{62} & \alpha_{63} & \alpha_{64} & \alpha_{65} & \alpha_{66} \end{vmatrix} \tag{7}$$

Für die α_{ik} gilt die Beziehung:

$$\sum_{1}^{6}{}_{m} \alpha_{km} \cdot \alpha_{lm} = \begin{cases} A & (l = \overline{k}) \\ o & (l \neq \overline{k}) \end{cases} \tag{8}$$

multiplizieren wir auf beiden Seiten mit A, so folgt aus (6):

$$(9)\quad \sum_{1}^{6}{}_{n} \alpha_{km} . A . \alpha_{l\,m} = \sum_{1}^{6}{}_{m} \alpha_{km} A_{l\,m} = \begin{cases} A^2 (l = k,\ l = k) \\ 0 \ (l \neq k,\ l \neq k) \end{cases}$$

Aus (6) ergiebt sich auch

$$(10)\quad A_{11}\, A_{12}\, A_{13}\, A_{14} A_{15} A_{15} = A^6 . \begin{vmatrix} \alpha_{44} \alpha_{45} \alpha_{46} \alpha_{41} \alpha_{42} \alpha_{43} \\ \alpha_{54} \\ \vdots \\ \alpha_{34} \qquad\qquad \alpha_{33} \end{vmatrix} - A^6 A$$

$$\begin{vmatrix} A_{21} & & \\ \vdots & & \\ A_{61} & & A_{66} \end{vmatrix}$$

Wir multiplizieren die Determinante der A_{ik} in (10) mit A:

$$\begin{vmatrix} A_{11} A_{12} \ldots & A_{16} \\ \vdots & \\ A_{61} & A_{66} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \alpha_{11} \alpha_{12} \ldots \alpha_{16} \\ \vdots \\ \alpha_{61} \ldots \alpha_{66} \end{vmatrix} = A^6 . A^2 = \begin{vmatrix} A^2 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ & & & \vdots \\ 0 & & & A^2 \end{vmatrix} = A^{12}$$

wie aus (9) folgt. Hieraus ergiebt sich:

$$A^2 = A^6,$$

und aus der Betrachtung des Diagonalgliedes:

$$A = + A^3$$

Daher schliesslich:

$$(11)\qquad \begin{vmatrix} A_{11} \ldots A_{16} \\ \vdots \\ A_{61} \ldots A_{66} \end{vmatrix} = A^9$$

Um für A ähnliche Beziehungen, wie (5) und (6) für A abzuleiten, benutzen wir einen von Franke angegebenen Satz: [3]

$$(12)\quad P = (-1)^{m+n} . A^{\rho-3} \begin{vmatrix} \alpha_{\mu_{k+1}\nu_{k+1}} \ldots \alpha_{\mu_{k+1}\nu_6} \\ \vdots \\ \alpha_{\mu_6\nu_{k+1}} \ldots \alpha_{\mu_6\nu_6} \end{vmatrix}$$

1) Journal für Mathematik, Bd. 61, 1863, p. 350.

Hier bezeichnet P eine beliebige Unterdeterminante von A, m und n die Inversionszahlen der Zeilen- und Kolonnenindizes, ρ den Grad von P, $\mu_{k+1} \ldots \mu_6$ und $\nu_{k+1} \ldots \nu_6$ die zu den in P fehlenden Indizes komplementären Indizes. Aus (12) erhalten wir, wieder in Beispielen angedeutet:

(13) $$\rho = 5: \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \ldots & \alpha_{15} \\ \vdots & & \\ \alpha_{51} & & \alpha_{55} \end{vmatrix} = A^2 \cdot \alpha_{33}$$

Das Vorzeichen giebt die Tabelle:

$$\left.\begin{array}{l} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ .\ 6: \mathrm{m} = 0 \\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ .\ 6: \mathrm{n} = 0 \end{array}\right\} \mathrm{m} + \mathrm{n} = 0$$

(14) $$\rho = 4: \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{14} & \alpha_{15} \\ \alpha_{31} & & & \\ & & & \\ \alpha_{51} & & & \\ \alpha_{61} & & \alpha_{65} & \end{vmatrix} = -A \begin{vmatrix} \alpha_{51} & \alpha_{53} \\ \alpha_{11} & \alpha_{13} \end{vmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} .1\ 3\ 5\ 6\ .\ 2\ 4: \mathrm{m} = 5 \\ 1\ 2\ 4\ 5\ .\ 3\ 6: \mathrm{n} = 2 \end{array}\right\} \mathrm{m} + \mathrm{n} = 7$$

(15) $$\rho = 3: \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{14} & \alpha_{16} \\ \alpha_{42} & \alpha_{44} & \alpha_{46} \\ \alpha_{52} & \alpha_{54} & \alpha_{56} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{54} & \alpha_{56} & \alpha_{52} \\ \alpha_{64} & \alpha_{66} & \alpha_{62} \\ \alpha_{34} & \alpha_{36} & \alpha_{32} \end{vmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1\ 4\ 5.\ 2\ 3\ 6: \mathrm{m} = 4 \\ 2\ 4\ 6.\ 1\ 3\ 5: \mathrm{n} = 6 \end{array}\right\} \mathrm{m} + \mathrm{n} = 7$$

Die Unterdeterminanten 3. Grades der α_{ik}, die für unsere Betrachtung wichtig sind, bezeichnen wir zur Abkürzung mit $\begin{pmatrix} f\ g\ h \\ i\ k\ l \end{pmatrix}$, wo f, g, h die Zeilen-, i, k, l die Kolonnenindizes sind, so dass (15) dann lautet:

$$\begin{pmatrix} 1\ 4\ 5 \\ 2\ 4\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\ 6\ 3 \\ 4\ 6\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Werte $\rho = 2$ und $\rho = 1$ geben nichts neues.

Es handelt sich für uns im wesentlichen um die Berechnung der $\binom{6}{3} \times \binom{6}{3} = 400 \begin{pmatrix} f\ g\ h \\ i\ k\ l \end{pmatrix}$. Hierzu dienen

verschiedene Formeln. Die Berechnung der Formel für den einzelnen Fall wollen wir immer nur an einem Beispiel ausführen, um dann die Gesamtresultate in Tabellen zusammenzustellen. Aus (4) ergiebt sich für $D = A_{ik}$, $\rho = 3$ z. B:

(16) $$\binom{6\ 5\ 1}{6\ 5\ 1} = \begin{vmatrix} \alpha_{66} & \alpha_{65} & \alpha_{61} \\ \alpha_{56} & \alpha_{55} & \alpha_{51} \\ \alpha_{16} & \alpha_{15} & \alpha_{11} \end{vmatrix} = A_{11}^2$$ 16 Formeln

Satz (4) auf die Determinante (5) angewandt, gibt für $\rho = 3$ in Verbindung mit (6):

$$\begin{vmatrix} A_{66} & A_{65} & A_{61} \\ A_{56} & A_{55} & A_{51} \\ A_{16} & A_{15} & A_{11} \end{vmatrix} = A^3 \begin{vmatrix} \alpha_{33} & \alpha_{32} & \alpha_{34} \\ \alpha_{23} & \alpha_{22} & \alpha_{24} \\ \alpha_{43} & \alpha_{42} & \alpha_{44} \end{vmatrix} = A^4 \cdot a_{11}^2$$

Wir erhalten also als Beispiel der zweiten Formelgruppe:

(17) $$\binom{3\ 2\ 4}{3\ 2\ 4} = \begin{vmatrix} \alpha_{33} & \alpha_{32} & \alpha_{34} \\ \alpha_{23} & \alpha_{22} & \alpha_{24} \\ \alpha_{43} & \alpha_{42} & \alpha_{44} \end{vmatrix} = A \cdot a_{11}^2$$ 16 Formeln

Eine weitere Gruppe ergibt sich aus (15). Wir erhalten zwei gleiche $\binom{f\ g\ h}{i\ k\ l}$, wenn wir zu f, g, h sowohl wie zu i, k, l die fehlenden Zahlen f', g', h' bezw. i', k', l' in der natürlichen Reihenfolge hinzufügen und hierzu wieder die komplementären Zahlen f', g', h' bezw. i', k', l' nehmen. Dann ist $\binom{f\ g\ h}{i\ k\ l} = \pm \binom{f'\ g'\ h'}{i'\ k'\ l'}$ und das Vorzeichen ist + oder —, jenachdem die Summe der Inversionszahlen von f g h f' g' h' und i k l i' k' l' gerade oder ungerade ist. Hierbei zeigt sich nun, dass eine Reihe von $\binom{f\ g\ h}{i\ k\ l}$ verschwinden, indem (15) die Form annimmt:

$$\begin{pmatrix} f\,g\,h \\ i\,k\,l \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} f\,g\,h \\ i\,k\,l \end{pmatrix} \quad o$$

z. B. $\begin{pmatrix} 1\,5\,6 \\ 4\,2\,3 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} 1\,5\,6\,.\,2\,3\,4 : m = 6 \\ 4\,2\,3\,.\,1\,5\,6 : n = 5 \end{matrix}\Big\} m + n = 11$

komplementär zu 2, 3, 4 sind 5, 6, 1, zu 1, 5, 6: 4, 2, 3. Es ist also:

(18) $\begin{pmatrix} 1\,5\,6 \\ 4\,2\,3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 5\,6\,1 \\ 4\,2\,3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1\,5\,6 \\ 4\,2\,3 \end{pmatrix} = o$ 32 Formeln.

Wir stellen diese Resultate in einer Tabelle zusammen,* wo die links stehenden Kombinationen die Zeilenindizes, die über den Kolonnen stehenden die Kolonnenindizes bezeichnen.

(19)	156	264	345	123	423	531	612	456
156	A_{11}^{2}	A_{12}^{2}	A_{13}^{2}	A_{14}^{2}	o	o	o	o
264	A_{21}^{2}	A_{22}^{2}	A_{23}^{2}	A_{24}^{2}	o	o	o	o
345	A_{31}^{2}	A_{32}^{2}	A_{33}^{2}	A_{34}^{2}	o	o	o	o
123	A_{41}^{2}	A_{42}^{2}	A_{43}^{2}	A_{44}^{2}	o	o	o	o
423	o	o	o	o	$A.a_{11}^{2}$	$A.a_{12}^{2}$	$A.a_{13}^{2}$	$A.a_{14}^{2}$
531	o	o	o	o	$A.a_{21}^{2}$	$A.a_{22}^{2}$	$A.a_{23}^{2}$	$A.a_{24}^{2}$
612	o	o	o	o	$A.a_{31}^{2}$	$A.a_{32}^{2}$	$A.a_{33}^{2}$	$A.a_{34}^{2}$
456	o	o	o	o	$A.a_{41}^{2}$	$A.a_{42}^{2}$	$A.a_{43}^{2}$	$A.a_{44}^{2}$

Die Berechnung der übrigen $\begin{pmatrix} f\,g\,h \\ i\,k\,l \end{pmatrix}$ ist etwas mühsamer; wir gebrauchen hierzu einige Formeln, welche die aus den α_{ik} gebildeten Determinanten 2. Grades durch die A_{ik} und α_{ik} ausdrücken. Setzen wir in (4)

*) Vergl. Staude; a. a. O.

für D eins der $16\,A_{ik}$ und $\rho = 2$, so erhalten wir eine Gleichung von der Form:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{lm} & \alpha_{ln} \\ \alpha_{pm} & \alpha_{pn} \end{vmatrix} = A_{ik} \cdot a_{gh}$$

Eine ganz allgemeine Formel für die Indizes würde zu unübersichtlich sein, und wir geben deshalb neun verschiedene.

$$(20)\quad \left\{\begin{array}{l}
A_{\overline{k}\,\overline{1}} \cdot a_{k_1 l_1} = \begin{vmatrix} \alpha_{k_3 k_1, l_3 l_1} & \alpha_{k_3 k_1, l_1 l_2} \\ \alpha_{k_1 k_2, l_3 l_1} & \alpha_{k_1 k_2, l_1 l_2} \end{vmatrix}; \\
A_{\overline{k}\,\overline{1}} \cdot a_{k_1 l_2} = \begin{vmatrix} \alpha_{k_3 k_1, l_1 l_2} & \alpha_{k_3 k_1, l_2 l_3} \\ \alpha_{k_1 k_2, l_1 l_2} & \alpha_{k_1 k_2, l_2 l_3} \end{vmatrix}; \\
A_{\overline{k}\,\overline{1}} \cdot a_{k_1 l_3} = \begin{vmatrix} \alpha_{k_3 k_1, l_2 l_3} & \alpha_{k_3 k_1, l_1 l_3} \\ \alpha_{k_1 k_2, l_2 l_3} & \alpha_{k_1 k_2, l_3 l_1} \end{vmatrix}; \\
A_{\overline{k}\,\overline{1}} \cdot a_{k_2 l_1} = \begin{vmatrix} \alpha_{k_1 k_2, l_3 l_1} & \alpha_{k_1 k_2, l_1 l_2} \\ \alpha_{k_2 k_3, l_3 l_1} & \alpha_{k_2 k_3, l_1 l_2} \end{vmatrix}; \\
A_{\overline{k}\,\overline{1}} \cdot a_{k_2 l_2} = \begin{vmatrix} \alpha_{k_1 k_2, l_1 l_2} & \alpha_{k_1 k_2, l_2 l_3} \\ \alpha_{k_2 k_3, l_1 l_2} & \alpha_{k_2 k_3, l_2 l_3} \end{vmatrix}; \\
A_{\overline{k}\,\overline{1}} \cdot a_{k_2 l_3} = \begin{vmatrix} \alpha_{k_1 k_2, l_2 l_3} & \alpha_{k_1 k_2, l_3 l_1} \\ \alpha_{k_2 k_3, l_2 l_3} & \alpha_{k_2 k_3, l_3 l_1} \end{vmatrix}; \\
A_{\overline{k}\,\overline{1}} \cdot a_{k_3 l_1} = \begin{vmatrix} \alpha_{k_3 k_3, l_3 l_1} & \alpha_{k_2 k_3, l_1 l_2} \\ \alpha_{k_3 k_1, l_3 l_1} & \alpha_{k_3 k_1, l_1 l_2} \end{vmatrix}; \\
A_{\overline{k}\,\overline{1}} \cdot a_{k_3 l_2} = \begin{vmatrix} \alpha_{k_2 k_3, l_1 l_2} & \alpha_{k_2 k_3, l_2 l_1} \\ \alpha_{k_3 k_1, l_1 l_2} & \alpha_{k_3 k_1, l_2 l_1} \end{vmatrix}; \\
A_{\overline{k}\,\overline{1}} \cdot a_{k_3 l_3} = \begin{vmatrix} \alpha_{k_2 k_3, l_2 l_3} & \alpha_{k_2 k_3, l_3 l_1} \\ \alpha_{k_3 k_1, l_2 l_3} & \alpha_{k_3 k_1, l_3 l_1} \end{vmatrix};
\end{array}\right.$$

Hier durchläuft k_1 alle Variationen mit Wiederholung der Zahlen 1, 2, 3, 4 in der ersten Kolonne nebenstehender Tabelle, während k_1, k_2, k_3 und l_1, l_2, l_3 die Werte

k_1	k_2	k_3
l_1	l_2	l_3
1,	2	3 4
2,	3	1 4
3,	1	2 4
4,	3	2 1

haben, welche in den zu dem betreffenden k, bew. l gehörigen Zeilen stehen. Mit Hülfe der Formeln (20) lassen sich die meisten noch übrigen $\begin{pmatrix} f & g & h \\ i & k & l \end{pmatrix}$ berechnen, indem wir sie nach einer Reihe entwickeln. Wir setzen zur Erläuterung der Formeln (20) noch zu jeder ein Beispiel, u. z. in derselben Reihenfolge, hierher, wobei (3) zu beachten ist:

$$\begin{matrix} \overline{k},\ k_1\ k_2\ k_3\,;\ \overline{l},\ l_1\,l_2\,l_3 \\ 1,\ 2\ \ 3\ \ 4\ \ \ 1,\,2\ 3\ 4 \end{matrix}$$

$$A_{\overline{k}\,\overline{l}}\,.\,a_{k_1 l_1} = A_{11}.a_{22} = \begin{vmatrix} \alpha_{55} & -\alpha_{51} \\ -\alpha_{15} & \alpha_{11} \end{vmatrix};$$

$$A_{\overline{k}\,\overline{l}}\,.\,a_{k_1 l_2} = A_{11}\,.\,a_{23} = \begin{vmatrix} -\alpha_{51} & -\alpha_{56} \\ \alpha_{11} & \alpha_{16} \end{vmatrix};$$

$$A_{\overline{k}\,\overline{l}}\,.\,a_{k_1 l_3} = A_{11}\,.\,a_{24} = \begin{vmatrix} -\alpha_{56} & \alpha_{55} \\ \alpha_{16} & -\alpha_{15} \end{vmatrix};$$

$$\begin{matrix} k,\ k_1\ k_2\ k_3;\ \overline{l},\ l_1\ \ l_2\ \ l_3 \\ 1,\,2\ \ 3\ \ 4\ \ \ 4,\,3\ \ 2\ \ 1 \end{matrix}$$

$$A_{\overline{k}\,\overline{l}}\,.\,a_{k_2 l_1} = A_{14}\,.\,a_{33} = \begin{vmatrix} -\alpha_{12} & -\alpha_{11} \\ -\alpha_{62} & -\alpha_{61} \end{vmatrix};$$

$$A_{\overline{k}\,\overline{l}}\,.\,a_{l_2 l_2} = A_{14}\,a_{32} = \begin{vmatrix} -\alpha_{11} & -\alpha_{13} \\ -\alpha_{61} & -\alpha_{63} \end{vmatrix};$$

$$\begin{matrix} \overline{k},\ k_1\ k_2\ k_3;\ \overline{l},\ l_1\ \ l_2\ \ l_3 \\ 2,\,3\ \ 1\ \ 4\ \ \ 3,\,1\ 2\ 4 \end{matrix}$$

$$A_{\overline{k}\,\overline{l}}\,.\,a_{k_2 l_3} = A_{23}\,.\,a_{14} = \begin{vmatrix} \alpha_{25} & -\alpha_{24} \\ \alpha_{45} & -\alpha_{44} \end{vmatrix};$$

$$\begin{matrix} \overline{k},\ k_1\ k_2\ k_3;\ \overline{l},\ l_1\ \ l_2\ \ l_3 \\ 4,\,3\ \ 2\ \ 1\ \ \ 2,\,3\ 1\ 4 \end{matrix}$$

$$A_{\overline{k}\,\overline{l}}\,.\,a_{k_3 l_1} = A_{42}\,.\,a_{13} = \begin{vmatrix} \alpha_{36} & -\alpha_{32} \\ \alpha_{26} & -\alpha_{22} \end{vmatrix};$$

$$\overline{k},\ k_1\ k_2\ k_3;\quad \overline{l},\ l_1\ l_2\ l_3$$
$$3,\ 1\ \ 2\ \ 4\qquad 3,\ 1\ 2\ 4$$

$$A_{\overline{k}\,\overline{l}}\,.\,a_{k_3\,l_3} = \begin{vmatrix} a_{53} & a_{55} \\ -a_{43} & -a_{45} \end{vmatrix};$$

$$\overline{k},\ k_1\ k_2\ k_3;\quad \overline{l},\ l_1\ l_2\ l_3$$
$$4,\ 3\ \ 2\ \ 1\qquad 3,\ 1\ 2\ 4$$

$$A_{\overline{k}\,\overline{l}}\,.\,a_{k_3\,l_1} = A_{43}\,.\,a_{14} = \begin{vmatrix} -a_{35} & a_{34} \\ -a_{25} & a_{24} \end{vmatrix};$$

Hieran mögen sich sofort einige Beispiele für die Berechnung der $\begin{pmatrix} f & g & h \\ i & k & l \end{pmatrix}$ mit Hülfe von (20) anschliessen.

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \begin{pmatrix} 145 \\ 156 \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{15} & a_{16} \\ a_{41} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{55} & a_{56} \end{vmatrix} = -a_{11}\,.\,A_{11}.a_{24} + a_{15}\,A_{11}\,.\,a_{23} \\ &\qquad - a_{16}\,A_{11}\,a_{22} = A_{11}\,A_{31} \\ \begin{pmatrix} 155 \\ 245 \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{52} & a_{54} & a_{55} \\ a_{62} & a_{64} & a_{65} \end{vmatrix} = -a_{12}\,.\,A_{13}\,.\,a_{44} \qquad a_{52}\,A_{13}\,a_{34} \\ &\qquad + a_{62}\,A_{13}\,a_{21} = A_{13}\,A_{12} \end{aligned}\right.$$

$$(22)\quad \begin{pmatrix} 4\ 1\ 2 \\ 4\ 2\ 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{44}\,a_{42}\,a_{43} \\ a_{14}\,a_{12}\,a_{13} \\ a_{24}\,a_{22}\,a_{23} \end{vmatrix} = -a_{14}\,.\,A_{24}\,a_{11} + a_{12}\,.\,A_{23}\,.\,a_{11} - a_{13}\,A_{22}\,a_{11}$$
$$= a_{44}\left\{\begin{aligned} &-(a_{21}\,a_{34} - a_{31}\,a_{24})\,A_{24} \\ &+(a_{23}\,a_{31} - a_{33}\,a_{21})\,A_{23} \\ &-(a_{24}\,a_{32} - a_{34}\,a_{22})\,A_{22} \end{aligned}\right\} = a_{44}\,.\,a_{34}\,.\,A$$

Die Formeln (21) und (22) fassen wir wieder in zwei Tabellen zusammen, wo die Indizesanordnung wie in (19) ist. Die Gleichung (15) zieht die Tabellen

zusammen,[1] indem hier je zwei $\begin{pmatrix} f & g & h \\ i & k & l \end{pmatrix}$ einander gleich werden.

3 a)

	245 od. 364	356 od. 145	164 od. 256	512 od. 613	623 od. 421	431 od. 532
156	A_{12} A_{13}	A_{13} A_{11}	A_{11} A_{12}	A_{11} A_{14}	A_{12} A_{14}	A_{13} A_{14}
264	A_{22} A_{23}	A_{23} A_{21}	A_{21} A_{22}	A_{21} A_{24}	A_{22} A_{24}	A_{23} A_{24}
345	A_{32} A_{33}	A_{33} A_{31}	A_{31} A_{32}	A_{31} A_{34}	A_{32} A_{34}	A_{33} A_{34}
123	A_{42} A_{43}	A_{43} A_{41}	A_{41} A_{42}	A_{41} A_{44}	A_{42} A_{44}	A_{43} A_{44}

	512 od. 631	623 od. 412	431 od. 523	254 od. 346	356 od. 154	164 od. 265
423	a_{12} a_{13} A	a_{13} a_{11} A	a_{11} a_{12} A	a_{11} a_{14} A	a_{12} a_{14} A	a_{13} a_{14} A
531	a_{22} a_{23} A	a_{23} a_{21} A	a_{21} a_{22} A	a_{21} a_{24} A	a_{22} a_{24} A	a_{23} a_{24} A
612	a_{32} a_{33} A	a_{33} a_{31} A	a_{31} a_{32} A	a_{31} a_{34} A	a_{32} a_{34} A	a_{33} a_{34} A
456	a_{42} a_{43} A	a_{43} a_{41} A	a_{41} a_{42} A	a_{41} a_{44} A	a_{42} a_{44} A	a_{43} a_{44} A

Durch Vertauschung von Zeilen und Kolonnen ergibt sich:

3 b)

	156	264	345	123	423	531	612	456	
5 od. 364	A_{21} A_{31}	A_{22} A_{32}	A_{23} A_{33}	A_{24} A_{34}	a_{21} a_{31} A	a_{22} a_{32} A	a_{23} a_{33} A	a_{24} a_{34} A	512 od. 631
6 od. 145	A_{31} A_{11}	A_{32} A_{12}	A_{33} A_{13}	A_{34} A_{14}	a_{31} a_{11} A	a_{32} a_{12} A	a_{33} a_{13} A	a_{34} a_{14} A	623 od. 412
4 od 256	A_{11} A_{21}	A_{12} A_{22}	A_{13} A_{23}	A_{14} A_{24}	a_{11} a_{21} A	a_{12} a_{22} A	a_{13} a_{23} A	a_{14} a_{24} A	431 od. 523
2 od. 613	A_{11} A_{41}	A_{12} A_{42}	A_{13} A_{43}	A_{14} A_{44}	a_{11} a_{41} A	a_{12} a_{42} A	a_{13} a_{43} A	a_{14} a_{44} A	245 od. 349
3 od. 421	A_{21} A_{41}	A_{22} A_{42}	A_{23} A_{43}	A_{24} A_{44}	a_{21} a_{41} A	a_{22} a_{42} A	a_{23} a_{43} A	a_{24} a_{44} A	356 od. 154
1 od. 532	A_{31} A_{41}	A_{32} A_{42}	A_{33} A_{43}	A_{34} A_{44}	a_{31} a_{41} A	a_{32} a_{42} A	a_{33} a_{43} A	a_{34} a_{44} A	164 od. 265

Um die noch übrigen $\begin{pmatrix} f & g & h \\ i & k & l \end{pmatrix}$ durch die A_{ik} und a_{ik} auszudrücken, sind noch einige Hülfsformeln nötig.

1) Staude; a. a. O.

$$A_{ii} = a_{kk}\,\alpha_{lm,\,lm} + a_{lk}\,\alpha_{mk,\,lm} + a_{mk}\,\alpha_{kl,\,lm}$$

$$A_{ik} = -(a_{ki}\,\alpha_{lm,\,lm} + a_{li}\,\alpha_{mk,\,lm} + a_{mi}\,\alpha_{kl,\,lm})$$

(24a)

$$\left\{\begin{array}{l} A_{ii}\,a_{ki} + A_{ik}\,a_{kk} = \alpha_{mk,\,lm}\cdot\begin{vmatrix} a_{lk} & a_{li} \\ a_{kk} & a_{ki}\end{vmatrix} \\ \qquad -\alpha_{kl,\,lm}\begin{vmatrix} a_{mi} & a_{mk} \\ a_{ki} & a_{kk}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{mk,\,lm} & \alpha_{mk,\,ik} \\ \alpha_{kl,\,lm} & \alpha_{kl,\,ik}\end{vmatrix} \\ A_{ii}\,a_{li} + A_{ik}\,a_{lk} = \alpha_{lm,\,lm}\cdot\begin{vmatrix} a_{kk} & a_{ki} \\ a_{lk} & a_{li}\end{vmatrix} \\ \qquad -\alpha_{kl,\,lm}\cdot\begin{vmatrix} a_{lk} & a_{li} \\ a_{mk} & a_{mi}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{lm,\,lm} & \alpha_{lm,\,ki} \\ \alpha_{kl,\,lm} & \alpha_{kl,\,ki}\end{vmatrix} \end{array}\right.$$

Hier bezeichnen i, k, l, m die Zahlen 1, 2, 3, 4 in beliebiger Reihenfolge, doch so, dass sie immer von einander verschieden sind. Die Summe $A_{ii}\,a_{mi} + A_{ik}\,a_{mk}$ gibt daher nichts neues. Bei Vertauschung von Zeilen und Kolonnen ergiebt sich ebenso:

(24b)

$$\left\{\begin{array}{l} A_{ii}\,a_{ik} + A_{ki}\,a_{kk} = \begin{vmatrix} \alpha_{ln,\,mk} & \alpha_{lm,\,kl} \\ \alpha_{ik,\,mk} & \alpha_{ik,\,kl}\end{vmatrix} \\ \text{und: } A_{ii}\,a_{il} + A_{ki}\,a_{kl} = \begin{vmatrix} \alpha_{lm,\,lm} & \alpha_{lm,\,kl} \\ \alpha_{ki,\,lm} & \alpha_{ki,\,kl}\end{vmatrix} \end{array}\right.$$

Mit Hülfe der Gleichungen (24a) und (24b) lassen sich nun die übrigen $\begin{pmatrix} f & g & h \\ i & k & l \end{pmatrix}$ zwar nicht einzeln, aber doch die Summe je zweier durch einfache Ausdrücke der A_{ik} und a_{ik} darstellen.

Vorher geben wir noch einige Beispiele zu (24a) und (24b).

i, k, l, m
1, 2, 3, 4

$$A_{11}\,a_{21} + A_{12}\,a_{22} = \begin{vmatrix} \alpha_{42,\,34} & \alpha_{42,\,12} \\ \alpha_{23,\,34} & \alpha_{23,\,12}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\alpha_{56} & -\alpha_{53} \\ \alpha_{16} & \alpha_{13}\end{vmatrix}$$

i, k, l, m
2, 4, 3, 1

$$A_{22}\,a_{32} - A_{24}\,a_{34} = \begin{vmatrix} \alpha_{31,31} & \alpha_{31,42} \\ \alpha_{43,31} & \alpha_{43,42} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{22} & -\alpha_{25} \\ -\alpha_{62} & \alpha_{65} \end{vmatrix}$$

i, k, l, m
4, 3, 2, 1

$$A_{44}\,a_{43} + A_{34}\,a_{33} = \begin{vmatrix} \alpha_{21,13} & \alpha_{21,32} \\ \alpha_{43,13} & \alpha_{43,32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{32} & \alpha_{31} \\ \alpha_{62} & \alpha_{61} \end{vmatrix}$$

i, k, l, m
2, 4, 3, 1

$$A_{22}\,a_{23} + A_{42}\,.\,a_{43} = \begin{vmatrix} \alpha_{31,31} & \alpha_{31,43} \\ \alpha_{42,31} & \alpha_{42,43} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{22} & -\alpha_{26} \\ -\alpha_{52} & \alpha_{56} \end{vmatrix}$$

Als Beispiel für die Berechnung der Summe zweier $\begin{pmatrix} f\,g\,h \\ i\,k\,l \end{pmatrix}$ diene $\begin{pmatrix} 512 \\ 631 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 631 \\ 631 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 512 \\ 631 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{56}\,\alpha_{53}\,\alpha_{51} \\ \alpha_{16}\,\alpha_{13}\,\alpha_{11} \\ \alpha_{26}\,\alpha_{23}\,\alpha_{21} \end{vmatrix} = \begin{matrix} (a_{33}\,a_{14} - a_{13}\,a_{34})\,A_{14}\,a_{22} - (a_{31}\,a_{12} \\ -a_{11}\,a_{32})\,A_{11}\,a_{23} - (a_{32}\,a_{13} \\ -a_{33}\,a_{12})\,(A_{11}\,a_{21} + A_{12}\,a_{22}) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 631 \\ 631 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{66}\,\alpha_{63}\,\alpha_{61} \\ \alpha_{36}\,\alpha_{33}\,\alpha_{31} \\ \alpha_{16}\,\alpha_{13}\,\alpha_{11} \end{vmatrix} = \begin{matrix} -(a_{13}\,a_{24} - a_{14}\,a_{23})\,A_{14}\,a_{32} + (a_{11}\,a_{22} \\ -a_{12}\,a_{21})\,A_{11}\,a_{33} + (a_{12}\,a_{23} \\ -a_{22}\,a_{13})\,(A_{11}\,a_{31} + A_{12}\,a_{32}) \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 512 \\ 631 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 631 \\ 631 \end{pmatrix} = {} & a_{22}\,a_{33}\,(a_{14}\,A_{14} + a_{12}\,A_{12} + a_{11}\,A_{11}) \\ & + a_{32}\,a_{23}\,(a_{11}\,A_{11} + a_{14}\,A_{14} + a_{12}\,A_{12}) \\ & - a_{32}\,a_{13}\,(A_{11}\,a_{21} + A_{12}\,a_{22} + A_{14}\,a_{24}) \\ & - a_{22}\,a_{13}\,(A_{11}\,a_{31} + A_{12}\,a_{32} + A_{14}\,a_{34}) \end{aligned}$$

$$(25) \qquad \begin{pmatrix} 512 \\ 631 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 631 \\ 631 \end{pmatrix} = (a_{22}\,a_{33} + a_{32}\,a_{23})\,A$$

Wir erhalten so folgende Tabelle:

(26)

	512 — 631	623 + 412	431 + 523	245 + 346	356 + 154	164 + 265
512 od. 631	$(a_{22}\,a_{33} + a_{32}\,a_{23})\,A$	$(a_{23}\,a_{31} + a_{33}\,a_{21})\,A$	$(a_{21}\,a_{32} + a_{31}\,a_{22})\,A$	$(a_{21}\,a_{43} + a_{31}\,a_{24})\,A$	$(a_{22}\,a_{24} + a_{32}\,a_{24})\,A$	$(a_{23}\,a_{34} + a_{33}\,a_{24})\,A$
623 od. 412	$(a_{32}\,a_{13} + a_{12}\,a_{33})\,A$	$(a_{33}\,a_{11} + a_{13}\,a_{31})\,A$	$(a_{31}\,a_{12} + a_{11}\,a_{32})\,A$	$(a_{31}\,a_{14} + a_{11}\,a_{34})\,A$	$(a_{32}\,a_{14} + a_{12}\,a_{34})\,A$	$(a_{33}\,a_{14} + a_{13}\,a_{34})\,A$
431 od. 523	$(a_{12}\,a_{23} + a_{22}\,a_{13})\,A$	$(a_{13}\,a_{21} + a_{23}\,a_{11})\,A$	$(a_{11}\,a_{22} + a_{21}\,a_{12})\,A$	$(a_{11}\,a_{24} + a_{21}\,a_{14})\,A$	$(a_{12}\,a_{24} - a_{22}\,a_{14})\,A$	$(a_{13}\,a_{24} + a_{23}\,a_{14})\,A$
245 od. 346	$(a_{12}\,a_{43} + a_{42}\,a_{13})\,A$	$(a_{13}\,a_{41} + a_{43}\,a_{11})\,A$	$(a_{11}\,a_{42} + a_{41}\,a_{12})\,A$	$(a_{11}\,a_{44} - a_{41}\,a_{14})\,A$	$(a_{12}\,a_{44} - a_{42}\,a_{14})\,A$	$(a_{13}\,a_{44} - a_{43}\,a_{14})\,A$
356 od. 154	$(a_{22}\,a_{43} - a_{42}\,a_{23})\,A$	$(a_{23}\,a_{41} + a_{43}\,a_{21})\,A$	$(a_{21}\,a_{42} + a_{41}\,a_{22})\,A$	$(a_{21}\,a_{44} + a_{41}\,a_{24})\,A$	$(a_{22}\,a_{44} + a_{42}\,a_{24})\,A$	$(a_{23}\,a_{44} + a_{43}\,a_{24})\,A$
164 od. 256	$(a_{32}\,a_{43} + a_{42}\,a_{33})\,A$	$(a_{33}\,a_{41} + a_{43}\,a_{31})\,A$	$(a_{31}\,a_{42} + a_{41}\,a_{32})\,A$	$(a_{31}\,a_{44} + a_{41}\,a_{34})\,A$	$(a_{32}\,a_{44} - a_{42}\,a_{34})\,A$	$(a_{33}\,a_{44} - a_{43}\,a_{34})\,A$

Die Tabellen (19), (23_a), (23_b), (26) enthalten sämtliche 400 $\begin{pmatrix} f & g & h \\ i & k & l \end{pmatrix}$ durch A, die A_{ik} und a_{ik} ausgedrückt, u. z. für $a_{ik} \neq a_{ki}$. Bei der späteren Anwendung gilt noch die Voraussetzung $a_{ik} = a_{ki}$, wodurch allgemein $\begin{pmatrix} f & g & h \\ i & k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & k & l \\ f & g & h \end{pmatrix}$ wird und sich demgemäss die Zahl der Formeln verringert.

§ 10.

Ableitung der die Fläche 2. Ordnung bestimmenden linearen Komplexe aus der Gleichung der Fläche.

Clebsch hat in seinen Vorlesungen über Geometrie[1] eine Lösung dieser Aufgabe für den Fall gegeben, dass in der Flächengleichung nur die Quadrate der Variabeln vorkommen; die Aufgabe soll hier allgemein behandelt werden.[2]

Die Gleichung der Fläche sei:

$$(1) \qquad \sum_1^4{}_i \sum_1^4{}_k a_{ik} x_i x_k = 0 \qquad a_{ik} = a_{ki};\ A \neq 0$$

Die Gleichungen der Polarebenen zweier Punkte x' und y' in bezug auf (1) sind:

$$(2) \qquad \sum_1^4{}_\alpha f'(x'_\alpha) x_\alpha = 0; \qquad \sum_1^4{}_\alpha f'(y'_\alpha) x_\alpha = 0$$

Aus (2) erhält man die Axenkoordinaten der, der Geraden x' y' in bezug auf (1) konjugierten Polaren:

$$\begin{aligned} \varrho\, q_{ik}' = \varrho\, p_{ik}' &= f'(x_i')\, f'(y_k') - f'(y_i')\, f'(x_k') \\ &= (a_{i1} x_1' + a_{i2} x_2' + a_{i3} x_3' + a_{i4} x_4')\,(a_{k1} y_1' \\ &\quad + a_{k2} y_2' + a_{k3} y_3' + a_{k4} y_4') \\ &\quad - (a_{i1} y_1' + a_{i2} y_2' + a_{i3} y_3' + a_{i4} y_4')\,(a_{k1} x_1' \\ &\quad + a_{k2} x_2' + a_{k3} x_3' + a_{k4} x_4') \end{aligned}$$

1) Clebsch-Lindemann, Geometrie des Raumes, Bd. 1 p. 144.

2) Staude; a. a. O.

$$\rho\, p_{\overline{ik}}' = \sum_{1}^{4}{}_{\lambda\mu}\, \alpha_{ik,\,\lambda\mu}\, p_{\mu\lambda} \qquad \text{oder:}$$

$$(3) \qquad \rho\, p_k' = \sum_{1}^{6}{}_{l}\, \alpha_{kl}\, p_l \qquad k = 1, 2 \ldots 6$$

Wir können nun die Erzeugenden der Fläche 2. Ordnung so definieren: eine Erzeugende ist eine solche Gerade, die mit ihrer reziproken Polaren zusammenfällt. Wir erhalten die gesuchten Komplexe, indem wir die Bedingungsgleichungen hierfür aufstellen, u. z. in Linienkoordinaten, da eine Gleichung in Linienkoordinaten die Gleichung eines Komplexes ist.

Wir setzen die Koordinaten der beiden Polaren, abgesehen von einem Faktor, einander gleich:

$$\rho\, p_k' = p_k$$

in (3) eingesetzt:

$$(4) \qquad \rho\, p_{\overline{k}} = \sum_{1}^{6}{}_{l}\, \alpha_{kl}\, p_l \qquad k = 1, 2 \ldots 6$$

(4) stellt sechs Gleichungen zwischen den Koordinaten der gesuchten Linie dar, welche, ausgeschrieben, folgende sind:

$$(5)' \begin{cases} \alpha_{11} p_1 + \alpha_{12} p_2 + \alpha_{13} p_3 + (\alpha_{14} - \rho) p_4 + \alpha_{15} p_5 + \alpha_{16} p_6 = 0 \\ \alpha_{21} p_1 + \alpha_{22} p_2 + \alpha_{23} p_3 + \alpha_{24} p_4 + (\alpha_{25} - \rho) p_5 + \alpha_{26} p_6 = 0 \\ \alpha_{31} p_1 + \alpha_{32} p_2 + \alpha_{33} p_3 + \alpha_{34} p_4 + \alpha_{35} p_5 + (\alpha_{36} - \rho) p_6 = 0 \\ (\alpha_{41} - \rho) p_1 + \alpha_{42} p_2 + \alpha_{43} p_3 + \alpha_{44} p_4 + \alpha_{45} p_5 + \alpha_{46} p_6 = 0 \\ \alpha_{51} p_1 + (\alpha_{52} - \rho) p_2 + \alpha_{53} p_3 + \alpha_{54} p_4 + \alpha_{55} p_5 + \alpha_{56} p_6 = 0 \\ \alpha_{61} p_1 + \alpha_{62} p_2 + (\alpha_{63} - \rho) p_3 + \alpha_{64} p_4 + \alpha_{65} p_5 + \alpha_{66} p_6 = 0 \end{cases}$$

Sollen die Gleichungen (5) überhaupt eine Lösung haben, so muss die Determinante verschwinden.

$$(6)\qquad \Theta(\rho) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14}-\rho & \alpha_{15} & \alpha_{16} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25}-\rho & \alpha_{26} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \alpha_{35} & \alpha_{36}-\rho \\ \alpha_{41}-\rho & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \alpha_{45} & \alpha_{46} \\ \alpha_{51} & \alpha_{52}-\rho & \alpha_{53} & \alpha_{54} & \alpha_{55} & \alpha_{56} \\ \alpha_{61} & \alpha_{62} & \alpha_{63}-\rho & \alpha_{64} & \alpha_{65} & \alpha_{66} \end{vmatrix} = 0$$

(6) ist in ρ vom sechsten Grade. Es soll nun zunächst bewiesen werden, dass in der entwickelten Gleichung die ungeraden Potenzen von ρ nicht vorkommen. Das absolute Glied der Gleichung ist jedenfalls $A = A^3$, und der Koeffizient von ρ^6 ist -1. Wir multiplizieren $\Theta(\rho)$ mit

$$A^9 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{16} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ A_{61} & & & A_{66} \end{vmatrix}$$

vgl. § 7, (11); und erhalten nach § 7 (6), (9):

$$\Theta(\rho)\,.\,A^9 = \begin{vmatrix} (A^2 - A.\alpha_{41}\rho) & -A.\alpha_{51}\rho & & -A.\alpha_{61}\rho \dots - A.\alpha_{31}\rho \\ -A.\alpha_{42}\rho & (A^2 - A\alpha_{52}\rho) & & -A.\alpha_{62}\rho \;.\; . \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ -A.\alpha_{46}\rho & & & (A^2 - A.\alpha_{36}\rho) \end{vmatrix}$$

$$\Theta(\rho).A^3 = \rho^6.\begin{vmatrix} \alpha_{41} - \dfrac{A}{\rho} & \alpha_{51} & \alpha_{61} & \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{42} & a_{52} - \dfrac{A}{\rho}\alpha_{62} & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \alpha_{46} & & & & & \alpha_{36} - \dfrac{A}{\rho} \end{vmatrix}$$

Vertauschen wir in dieser Determinante Zeilen und Kolonnen und bringen dann durch neun Vertauschungen die Zeilen in dieselbe Reihenfolge wie in (6), so hat die Determinante den Wert $-\Theta\left(\frac{A}{\rho}\right)$. Wir haben also diese identische Gleichung:

$$A^3 . \Theta(\rho) = -\rho^6 \Theta\left(\frac{A}{\rho}\right)$$

Schreiben wir

$$\Theta(\rho) = A^3 + b\rho + c\rho^2 + d\rho^3 + e\rho^4 + f\rho^5 - \rho^6,$$

so wird diese Gleichung:

$$(7)\quad A^6 + A^3 b\rho + A^3 c\rho^2 + A^3 d\rho^3 + A^3 e\rho^4 + A^3 f.\rho^5 - A^3\rho^6 = A^6 - f.A^5\rho - eA^4\rho^2 - dA^3\rho^3 - cA^2\rho^4 - b.A\rho^5 - A^3\rho^6$$

Da (7) identisch in ρ gilt, erhalten wir

$$-b = f.A^2, -c = e.A, d = 0$$

$\Theta(\rho)$ hat also jetzt die Form:

$$\Theta(\rho) = A^3 - A^2 f.\rho - A.e.\rho^2 + e\rho^4 + f.\rho^5 - \rho^6 = 0$$

Es ist aber als Koeffizient von ρ^1:

$$-A^2 f = \Theta'(0),$$

und, indem wir $\Theta(\rho)$ nach den einzelnen, ρ enthaltenden Elementen differenzieren und beachten, dass $a_{ik} = a_{ki}$, also auch $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$:

$$\Theta'(0) = -2\left(\frac{\partial A}{\partial \alpha_{14}} + \frac{\partial A}{\partial \alpha_{25}} + \frac{\partial A}{\partial \alpha_{36}}\right)$$

Nach § 7, (13):

$$\Theta'(0) = -2A^2(\alpha_{14} + \alpha_{25} + \alpha_{36}) =$$

$$-2A^2\left(\begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{12} & a_{14} \end{vmatrix} + a_{13}\, a_{14}\, a_{23}\, a_{24}\right) = 0$$

also:

$$f = 0$$

Die Gleichung hat also, was zu beweisen war, die Form

$$\Theta(\rho) = A^3 - A\,e\,\rho^2 + e\,\rho^4 - \rho^6 = 0 \tag{8}$$

Es muss jetzt noch e bestimmt werden. Wir bilden, indem wir zugleich 9 Zeilen- und 9 Kolonnenvertauschungen machen, $\Theta(-\rho)$.

$$\Theta(-\rho) = \begin{vmatrix} \alpha_{44} & \alpha_{45} & \alpha_{46} & \alpha_{41}+\rho & \alpha_{42} & \alpha_{43} \\ \alpha_{54} & \alpha_{55} & \alpha_{56} & \alpha_{51} & \alpha_{52}+\rho & \alpha_{53} \\ \alpha_{64} & \alpha_{65} & \alpha_{66} & \alpha_{61} & \alpha_{62} & \alpha_{63}+\rho \\ \alpha_{14}+\rho & \alpha_{15} & \alpha_{16} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{24} & \alpha_{25}+\rho & \alpha_{26} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{34} & \alpha_{35} & \alpha_{36}+\rho & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}, \tag{9}$$

und multiplizieren mit Benutzung von § 7 . (8) die Formeln (6) und (9):

$$\Theta(\rho).\Theta(-\rho) = \begin{vmatrix} A-\rho^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A-\rho^2 & & & & \\ \cdot & & \cdot & & & \\ \cdot & & & \cdot & & \\ \cdot & & & & \cdot & \\ 0 & & & & & A-\rho^2 \end{vmatrix} = (A-\rho^2)^6$$

Da nach (8) aber $\Theta(\rho) = \Theta(-\rho)$ ist und A^3 das + Zeichen hat, so haben wir schliesslich die Gleichung

$$\Theta(\rho) = (A-\rho^2)^3 = 0 \tag{10}$$

mit den beiden dreifachen Wurzeln:

$$\rho_1 = \sqrt{A}\,,\ \rho_2 = -\sqrt{A}$$

Setzen wir diese in die Bedingungsgleichungen ein, so haben wir:

$$\pm\sqrt{A}\,.\,p_k = \sum_1^6 \alpha_{kl}\,p_l \tag{11}$$

Die Determinante ist jetzt null, wir haben aber so erst zwei Lösungen für die p_l, obwohl es ∞^2 geben muss.

Wir untersuchen jetzt die Unterdeterminanten 5. Grades von $\Theta(\rho)$, z. B.

$$\Theta_{12}(\rho) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25} & \rho - \alpha_{26} \end{vmatrix}$$

$$\Theta_{12}(\rho) \cdot \Theta(-\rho) = \begin{vmatrix} \alpha_{61} & & & & & \alpha_{66} \\ \alpha_{45} & \alpha_{55} & \alpha_{65} & \alpha_{15} & \alpha_{25} + \rho & \alpha_{35} \\ 0 & A-\rho^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ 0 & & & & & A-\rho^2 \end{vmatrix}$$

wie wieder aus § 7, (8) folgt. Es ist also

$$\Theta_{12}(\rho) = \alpha_{45}(A-\rho)^2$$

und allgemein:

$$\Theta_{ik}(\rho) = \alpha_{ik}(A-\rho^2)^2;\ ik = \begin{matrix} 14, 25, 36 \\ 41, 52, 63 \end{matrix}:$$

$$\Theta_{ik}(\rho) = (\alpha_{\bar{i}\bar{k}} + \rho)(A-\rho^2)^2$$

Es sind also auch die Unterdeterminanten 5. Grades der Gleichungen (11) sämtlich null.

Wir untersuchen noch die Unterdeterminanten 4. Grades von $\Theta(\rho)$, z. B.

$$\Theta_{12,\,23}(\rho) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \alpha_{35} & \alpha_{36} - \rho \\ \alpha_{41} - \rho & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \alpha_{61} & & & & & \alpha_{66} \end{vmatrix}$$

und erhalten in derselben Weise:

$$\Theta_{k_1 k_2,\ l_1 l_2}(\rho) = \begin{vmatrix} \alpha_{\bar{k}_1 \bar{k}_2} & \alpha_{\bar{k}_1 \bar{l}_2} \\ \alpha_{\bar{l}_1 \bar{k}_2} & \alpha_{\bar{l}_1 \bar{l}_2} \end{vmatrix} (A-\rho^2)^1 \tag{13}$$

wo der Koeffizient in analoger Weise wie in (12) für bestimmte Kombinationen etwas abweichen kann.

Die Gleichungen (10), (12), (13) zeigen also, dass für $\varrho = \pm \sqrt{A}$ alle Unterdeterminanten 4. Grades des Systems (4) verschwinden, dass also die sechs Gleichungen nur für drei unabhängige zählen, wie es ja auch sein muss, da die Fläche durch drei Komplexe bestimmt ist.

Es fragt sich nun, ob die Fläche (1) aus jeder der $\binom{6}{3} = 20$ Kombinationen einer der beiden Komplexgruppen (11) bestimmbar ist, oder ob die Gleichung für einige derselben illusorisch wird. Wir benutzen zur Ableitung der Gleichung die Form § 6, (6) und die Tabellen des § 7, wollen dieselbe aber wieder nur an einem Beispiele ausführen, u. z. sei $\varrho = +\sqrt{A}$, so dass die Gleichungen (11), vollständig ausgeschrieben, lauten:

$$(14)\quad \begin{cases} C_1 = \alpha_{11} p_1 + \alpha_{12} p_2 + \alpha_{13} p_3 + (\alpha_{14} - \sqrt{A})\, p_4 + \alpha_{15} p_5 + \alpha_{16} p_6 = 0 \\ C_2 = \alpha_{21} p_1 + \alpha_{22} p_2 + \alpha_{23} p_3 + \alpha_{24} p_4 + (\alpha_{25} - \sqrt{A})\, p_5 + \alpha_{26} p_6 = 0 \\ C_3 = \alpha_{31} p_1 + \alpha_{32} p_2 + \alpha_{33} p_3 + \alpha_{34} p_4 + \alpha_{35} p_5 + (\alpha_{36} - \sqrt{A})\, p_6 = 0 \\ C_4 = (\alpha_{41} - \sqrt{A})\, p_1 + \alpha_{42} p_2 + \alpha_{43} p_3 + \alpha_{44} p_4 + \alpha_{45} p_5 + \alpha_{46} p_6 = 0 \\ C_5 = \alpha_{51} p_1 + (\alpha_{52} - \sqrt{A})\, p_2 + \alpha_{53} p_3 + \alpha_{54} p_4 + \alpha_{55} p_5 + \alpha_{56} p_6 = 0 \\ C_6 = \alpha_{61} p_1 + \alpha_{62} p_2 + (\alpha_{63} - \sqrt{A})\, p_3 + \alpha_{64} p_4 + \alpha_{65} p_5 + \alpha_{66} p_6 = 0 \end{cases}$$

Nehmen wir z. B. die drei Komplexe $C_3 = 0$, $C_5 = 0$, $C_6 = 0$. Nach § 6, (6) wird die Gleichung der durch sie bestimmten Fläche:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{52} - \sqrt{A} & \alpha_{53} & \alpha_{54} \\ \alpha_{62} & \alpha_{65} - \sqrt{A} & \alpha_{64} \end{vmatrix} . x_1^2 + \begin{vmatrix} \alpha_{33} & \alpha_{31} & \alpha_{35} \\ \alpha_{53} & \alpha_{51} & \alpha_{55} \\ \alpha_{63} - \sqrt{A} & \alpha_{61} & \alpha_{65} \end{vmatrix} x_2^2 + \ldots\ldots = 0$$

Die Koeffizienten werden einzeln berechnet:

$$\left\{\binom{3\,5\,6}{2\,2\,4} + \sqrt{A}\,(\alpha_{32}\,\alpha_{54} + \alpha_{33}\,\alpha_{64} - \alpha_{34}\,\alpha_{63} - \alpha_{34}\,\alpha_{52}) + A\,.\,\alpha_{34}\right\} x_1^2 + \left\{\binom{3\,5\,6}{3\,1\,5} - \sqrt{A}\,.\begin{vmatrix}\alpha_{31} & \alpha_{35}\\ \alpha_{51} & \alpha_{55}\end{vmatrix}\right\} x_2^2 + \ldots = 0$$

$$\left\{a_{12}\,a_{14}\,A - \sqrt{A}\,.\,a_{11}\,A_{31} + A\,(a_{11}\,a_{24} - a_{12}\,a_{14})\right\} x_1^2 + \left\{a_{22}\,a_{24}\,A - \sqrt{A}.\,a_{22}\,A_{31}\right\} x_2^2 + \ldots = 0$$

$$a_{11}\,(A.\,a_{24} - A_{31}\sqrt{A})\,x_1^2 + a_{22}\,(A.\,a_{24} - A_{31}\sqrt{A})\,x_2^2 + \ldots = 0$$

In ähnlicher Weise lassen sich die andern Koeffizienten berechnen; die Gleichung hat den Faktor $A.a_{24} - A_{31}\sqrt{A}$. Es ergibt sich für jede der 20 Komplexkombinationen die Gleichung (1) mit einem im allgemeinen nicht verschwindenden Faktor, der für die einzelnen Kombinationen in folgender Tabelle angegeben ist.

(15)

$$\left\{\begin{array}{r}
156 : -A_{11}\sqrt{A}\,;\ 264 : -A_{22}\sqrt{A}\,;\\
345 : -A_{33}\sqrt{A}\,;\ 123 : -A_{44}\sqrt{A}\\
234 : a_{11}A\,;\ 315 : a_{22}A\,;\ 126 : a_{33}A\,;\ 456 : a_{44}A\\
\left.\begin{array}{r}254\\ \text{oder } 364\end{array}\right\} : \pm\,(a_{14}A - A_{23}\sqrt{A})\,;\\
\left.\begin{array}{r}356\\ \text{oder } 145\end{array}\right\} : \pm\,(a_{24}A - A_{31}\sqrt{A})\,;\\
\left.\begin{array}{r}164\\ \text{oder } 256\end{array}\right\} : \pm\,(a_{34}A - A_{12}\sqrt{A})\\
\left.\begin{array}{r}125\\ \text{oder } 316\end{array}\right\} : a_{23}A - A_{14}\sqrt{A}\,;\\
\left.\begin{array}{r}236\\ \text{oder } 124\end{array}\right\} : a_{31}A - A_{24}\sqrt{A}\,;\\
\left.\begin{array}{r}314\\ \text{oder } 235\end{array}\right\} : a_{12}A - A_{34}\sqrt{A}
\end{array}\right.$$

$+ \sqrt{A}$ bestimmt natürlich nur die eine Schar von Erzeugenden; um die andere zu erhalten, müsste man in diesen Formeln überall die negative statt der positiven Wurzel setzen.

§ 11.

Anwendung auf spezielle Gleichungsformen.

Die Resultate des vorigen Paragraphen sollen jetzt auf den Fall angewendet werden, dass die Fläche durch ihre auf die Hauptaxen bezogene Gleichung gegeben sei, u. z. sollen nur die reellen Linienflächen, das einschalige Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid, behandelt werden, indem sich für die andern diesen ganz analoge Verhältnisse ergeben.

Die Gleichung des einschaligen Hyperboloids ist:

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

Für die in den abzuleitenden Komplexen vorkommenden Konstanten ergibt sich:

$$A = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{a^2 b^2 c^2}\,; \quad \sqrt{A} = \pm \frac{1}{abc}\,;$$

$$\alpha_{11} = -\frac{1}{b_2 c^2}\,; \quad \alpha_{22} = -\frac{1}{c^2 a^2}\,; \quad \alpha_{33} = \frac{1}{a^2 b^2}$$

$$\alpha_{44} = -\frac{1}{a^2}\,; \quad \alpha_{55} = -\frac{1}{b^2}\,; \quad \alpha_{66} = \frac{1}{c^2}$$

Die übrigen α_{ik} werden null. Die Gleichungen der Komplexe sind daher nach § 10, (14). indem wir $\sqrt{A}$ positiv nehmen:

$$(2)\quad \begin{cases} C_1 = \dfrac{p_1}{b^2 c^2} - \dfrac{p_4}{abc} = 0\,; \; C_2 = \dfrac{p_2}{c^2 a^2} - \dfrac{p_5}{abc} = 0\,; \\ C_3 = \dfrac{p_3}{a^2 b^2} - \dfrac{p_6}{abc} = 0 \\ C_4 = -\dfrac{p_1}{abc} - \dfrac{p_4}{a^2} = 0\,; \; C_5 = -\dfrac{p_2}{abc} - \dfrac{p_5}{b^2} = 0\,; \\ C_6 = -\dfrac{p_3}{abc} + \dfrac{p_6}{c^2} = 0 \end{cases}$$

Die p_i sollen jetzt rechtwinklige homogene Koordinaten bedeuten. Je zwei der sechs Komplexe (2) sind identisch, und es bleiben nur die drei:

$$(3)\quad p_1 + \frac{bc}{a} p_4 = 0\,; \; p_2 + \frac{ca}{b} p_5 = 0\,; \; p_3 + \frac{ab}{c} p_6 = 0$$

Nehmen wir statt $+\sqrt{A}$ die negative Wurzel, so ergeben sich drei weitere Komplexe:

$$p_1 - \frac{bc}{a} p_4 = 0;\; p_2 - \frac{ca}{b} p_5 = 0;\; p_3 + \frac{ab}{c} p_6 = 0$$

Die Axen der Komplexe (3) und (4) fallen mit den Hauptaxen des Hyperboloids zusammen. Die Komplexe (4) unterscheiden sich von den Komplexen (3) nur durch das Vorzeichen des Parameters, je zwei sind also konjugiert.[1] Die Parameter sind direkt proportional den Koeffizienten der Flächengleichung; der ausgezeichneten Flächenaxe entspricht auch der den beiden andern entgegengesetzt gewundene Komplex.[2] Da nun jede Mittelpunktsfläche 2. Ordnung in dieser Weise drei Komplexe mit aufeinander senkrechten Axen bestimmt, welche eine dreigliedrige Gruppe bestimmen, so ergibt sich umgekehrt: Unter den ∞^2 Komplexen einer dreigliedrigen Gruppe, welche eine Mittelpunktsfläche 2. Ord-

1) Plücker, N. G. d. R. p. 58.
2) N. G. d. R. p. 56 und 57.

nung bestimmt, befinden sich stets drei, deren Axen aufeinander senkrecht stehen. Auf diesem Wege wäre eine Transformation einer beliebig gegebenen Mittelpunktsfläche 2. Ordnung auf ihre Hauptaxen möglich, indem man in der durch diese in den Formeln (14), § 10 bestimmten dreigliedrigen Gruppe jene drei Komplexe bestimmt, ihre Axen als Koordinatenaxen wählt und wieder aus ihnen die Flächengleichung ableitet, welche dann nur die Quadrate der Variabeln enthält.[1] Die Ausführung dieses Verfahrens bietet im allgemeinen Falle grosse Schwierigkeiten und soll deshalb nur an einem einfachen Beispiel gemacht werden.

Es sei gegeben die Fläche:

$$z^2 + 2xy = 1$$

Die Konstanten sind:

$$A = 1;\ \alpha_{33} = -1;\ \alpha_{12} = \alpha_{21} = -1;\ \alpha_{45} = \alpha_{54} = -1;\ \alpha_{66} = -1$$

Es ergeben sich die drei Komplexe:

$$p_2 + p_4 = 0;\ p_1 + p_5 = 0;\ p_3 + p_6 = 0$$

Diese bestimmen die dreigliedrige Gruppe:

$$\lambda(p_2 + p_4) + \mu(p_1 + p_5) + \nu(p_3 + p_6) = 0$$

Wir erhalten als Gleichung der Axen dieser Komplexe:[2]

$$x = \frac{\mu\nu - \lambda\nu - \mu s}{\mu^2 + \lambda^2 + \nu^2}$$

$$y = \frac{\mu\nu - \lambda\nu - \lambda s}{\mu^2 + \lambda^2 + \nu^2}$$

$$z = \frac{\lambda^2 - \mu^2 - \nu s}{\mu^2 + \lambda^2 + \nu^2}$$

Es müssen nun drei Wertesysteme für λ, μ, ν gefunden werden, sodass die zugehörigen Axen aufeinander

1) Vgl. § 5 (9).
2) N. G. d. R. p. 32.

senkrecht stehen und durch einen Punkt gehen. Dies ist im allgemeinen sehr umständlich; hier jedoch sieht man leicht, dass die Axen die verlangte Lage haben, wenn man nacheinander setzt:

$\lambda = 0, \mu = 0, \nu = 1; \lambda = 1, \mu = 1, \nu = 0; \lambda = 1, \mu = -1, \nu = 0$

Man erhält dann aus der Gruppe die drei Komplexe:

$p_3 + p_6 = 0; p_1 + p_2 + p_4 + p_5 = 0; -p_1 + p_2 + p_4 - p_5 = 0$

Jetzt kann man das Koordinatensystem so legen, dass die Axen desselben mit den Komplexaxen zusammenfallen. Die Parameter der drei gefundenen Komplexe sind bezw. $1, 1, -1$,[1] sodass wir die drei Komplexgleichungen haben:

$$p_1 - p_4 = 0 \; ; \; p_2 + p_5 = 0 \; ; \; p_3 + p_6 = 0$$

welche in dem neuen Koordinatensystem die gesuchte Gleichung geben

$$x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$$

Dies ist die Hauptaxen-Gleichung eines einschaligen Hyperboloids mit den Halbaxen 1, 1, 1.

Um aus den abgeleiteten Komplexen wieder das gegebene Hyperboloid zu erhalten, dürfen natürlich nur entweder die drei Komplexe (3) oder (4) vereinigt werden; dagegen erhält man andere in einfacher Beziehung zu dem gegebenen Hyperboloid stehende Flächen, wenn man die sechs Komplexe beliebig kombiniert. Jenachdem die Axen der drei ausgewählten Komplexe verschieden sind, oder zwei von ihnen zusammenfallen, erhält man Mittelpunktsflächen oder Paraboloide. Im ersten Falle ist noch zu unterscheiden, ob die Parameter alle drei gleiches Vorzeichen haben

1) N. G. d. R. p. 58.

oder nicht, d. h. ob die drei Komplexe gleich gewunden sind oder nicht. Haben die Parameter gleiches Zeichen, so erhält man das imaginäre Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0\ ;$$

ist dies nicht der Fall, so erhält man ausser dem gegebenen noch die einschaligen Hyperboloide

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0\ ;\ -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

welche also dieselben Hauptaxen, wie das gegebene, haben, bei denen nur statt der z-Axe die y-, bezw. x-Axe ausgezeichnet sind. — Fallen dagegen zwei Axen zusammen, d. h. hier: haben wir zwei konjugierte Komplexe und einen, dessen Axe auf der gemeinsamen jener beiden senkrecht steht, so ergeben sich die hyperbolischen Paraboloide

$$ayz \pm bcx = 0\ ;\ bzx \pm cay = 0\ ;\ cxy \pm abz = 0,$$

in welchen immer zwei Erzeugende mit zwei Hauptaxen des gegebenen Hyperboloids zusammen fallen.

Das hyperbolische Paraboloid, auf welches wir jetzt dieselben Betrachtungen anwenden wollen, sei gegeben durch die Gleichung:

$$(5)\qquad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+2x=0$$

Hier ist:

$$A=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{b^2c^2}\ ;\ \sqrt{A}=\pm\frac{1}{bc}$$

$$\alpha_{11}=-\frac{1}{b^2c^2}\ ;\ \alpha_{62}=\alpha_{26}=-\frac{1}{c^2}\ ;$$

$$\alpha_{44}=-1\ ;\ \alpha_{53}=\alpha_{35}=-\frac{1}{b^2}$$

Es ergeben sich die Komplexe zunächst für $\sqrt{A} = +\frac{1}{bc}$:

$$(6)\quad \begin{cases} -\frac{1}{b^2c^2}p_1 - \frac{1}{bc}p_4 = 0\,; -\frac{1}{bc}p_5 - \frac{1}{c^2}p_6 = 0\,; \\ \qquad -\frac{1}{b^2}p_5 - \frac{1}{bc}p_6 = 0 \\ -\frac{1}{bc}p_1 - p_4 = 0\,; -\frac{1}{bc}p_2 - \frac{1}{b^2}p_3 = 0\,; \\ \qquad -\frac{1}{c^2}p_2 - \frac{1}{bc}p_3 = 0 \end{cases}$$

Diese reduzieren sich auf die drei:

$$(7)\quad p_1 + bc\,p_4 = 0\,;\ p_5 + \frac{b}{c}p_6 = 0\,;\ p_2 + \frac{c}{b}p_3 = 0$$

Für $\sqrt{A} = -\frac{1}{bc}$ ergeben sich die andern drei:

$$8)\quad p_1 - bcp_4 = 0\,;\ p_5 - \frac{b}{c}p_6 = 0\,;\ p_2 - \frac{c}{b}p_3 = 0$$

Wir haben also in (7) einen nicht speziellen Komplex mit der x-Axe als Axe und zwei spezielle Komplexe, von denen einer durch den Koordinatenanfang geht und in der yz-Ebene liegend den von der y- und z-Axe eingeschlossenen Winkel im Verhältnis $\frac{b}{c}$ teilt, während der andere unendlich fern liegt, u. z. sind die ihm zugehörigen Ebenen normal zu dem andern speziellen Komplex. Die Komplexe (8) unterscheiden sich von diesen dadurch, dass der eine einen entgegengesetzt gleichen Parameter hat und dass die beiden speziellen auf den obigen senkrecht stehen. Durch Kombination von (7) und (8) erhält man Paraboloide oder Ebenenpaare, deren Lagebeziehungen leicht zu übersehen sind.

Zum Schlusse sei es mir gestattet, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. Staude, für die gütige Unterstützung, die er mir bei dieser Arbeit erwies, meinen aufrichtigen Dank auszusprechen.

Berichtigung.

Seite 40, Zeile 7: C_c anstatt C_e.
„ 47, „ 14 und 16: A' anstatt A.